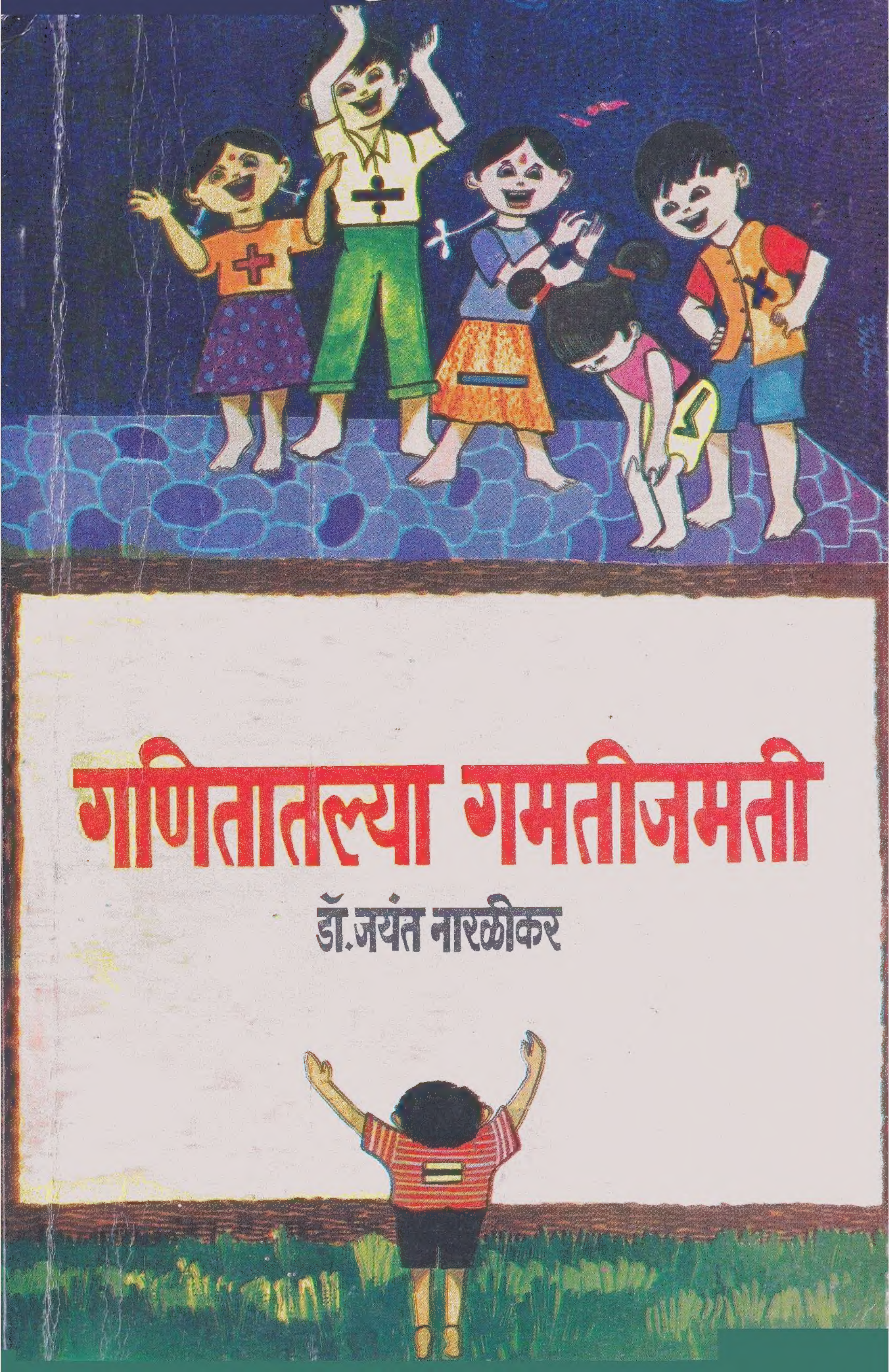

गणितातल्या गमतीजमती
डॉ.जयंत नारळीकर

# गणितातल्या गमती जमती

लेखक

डॉ. जयंत नारळीकर

मनोविकास प्रकाशन

गणितातल्या गमती-जमती

**प्रकाशक**

अरविंद घनःश्याम पाटकर

**मनोविकास प्रकाशन**

आमदार निवास कंपाऊंड,

मंत्रालय शेजारी, चर्चगेट

मुंबई - ४०० ०३२.



**मुखपृष्ठ मांडणी**

सतिश भावसार

**मुद्रक**

श्री. चंद्रकांत उकार्डे

**पॉप्युलर ऑफसेट प्रिंटर्स**

लोअर परेल, मुंबई - ४०० ०१३.

# प्रास्ताविक

पूर्वी 'किर्लोस्कर' मध्ये सदर रूपाने प्रसिद्ध झालेली लेखमाला आता सुधारित रूपात पुस्तक म्हणून प्रसिद्ध होत आहे याचा मला आनंद वाटतो. गणितातील गमती जमती वाचून वाचकाला गणिताबद्दल आपुलकी वाटेल. निदान त्याचे कुतूहल तरी वाढेल अशी आशा आहे. लेखमालेला 'किर्लोस्कर'च्या वाचकांनी उत्तम प्रतिसाद दिला होता. पुस्तकरूपाने ती अधिक वाचकांना सुलभ करून दिल्याबद्दल मी श्री. अरविंद पाटकर यांचे आभार मानतो.

**— जयंत नारळीकर**

'आयुका' पुणे ४११ ००७
फेब्रुवारी १९९२

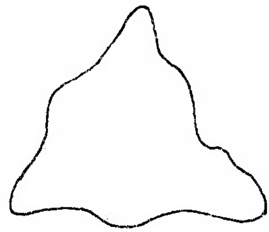
# अनुक्रमणिका

# १. गणितातल्या गमती जमती

सामान्य माणूस गणित ह्या विषयाशी वचकून असतो. हा विषय फार भयंकर, अति क्लिष्ट, आकडेमोडीनी भरलेला... ह्याला दुरूनच नमस्कार केलेला बरा असं त्याला वाटतं. ही धारणा बहुतेक शालेय जीवनात घडणाऱ्या गणिताच्या दर्शनाने निर्माण केली जाते, ही एक दुर्दैवाची गोष्ट आहे. वास्तविक, गणिताच्या अनेक मनोरंजक पैलूंचे आणि मानवी कल्पनाशक्तीला चालना देणाऱ्या वेगवेगळ्या स्वरूपांचे दर्शन योग्य वेळी घडल्यास ह्या विषयाबद्दल जिव्हाळा आणि आदर निर्माण व्हायला हरकत नाही. गणित हा अवघड विषय आहे हे खरं - पण तो कशामुळे? निव्वळ आकडेमोडीमुळे नव्हे. लांबलचक फॉर्म्युल्यामुळे नव्हेच नव्हे ! आधुनिक गणितातले कित्येक कूटप्रश्न दिसायला फार सोपे वाटतात. पण ते सोडविण्यासाठी लागणारा अमूर्त आणि व्यापक दृष्टिकोन मोजक्या संशोधकांतच असतो.

अशा ह्या आधुनिक गणिताच्या काही मनोरंजक भागाची, त्यातल्या काही कूटप्रश्नांची इथे थोडक्यात ओळख करून देत आहे.

येथे चित्र क्रमांक १ मध्ये दोन आकृत्या आहेत. या दोन आकृत्यात साम्य आहे का? दोन्ही आकृतीत समान असा एक तरी गुण आहे का?



चित्र क्र. १

सामान्य माणूस याचे उत्तर बहुतेक नकारार्थीच देईल. पण हाडाच गणिती मात्र त्या उत्तराशी सहमत होणार नाही.

त्याचं उत्तर असं असेल –

"समजा, एका कागदावर डावीकडली आकृती काढली. त्यामुळं कागदाचे दोन भाग होतात. एक आतला आणि एक बाहेरचा. आतून बाहेर जाताना कुठेतरी त्या आकृतीचा परिघ ओलांडावा लागेल. बरोब हाच गुण उजवीकडच्या आकृतीत आहे"

दोन्ही आकृत्यांतला हा समान गुण तुम्हाला सहजच समजेल. त्यात विशेष काय आहे? पण अशा तऱ्हेच्या सोप्या आणि उघड वाटणाऱ्य गोष्टींमागे बरेंच वेळा गणितातलं एखादं महत्त्वाचं प्रमेय दडलेलं असतं वरचा जो गुण दाखविला त्यामागे जॉर्डनचं प्रमेय आहे.

'प्रमेय' हा शब्द पाहून घाबरू नका ! कारण हे प्रमेय समजून घेण्यास अगदी सोपं आहे.

कुठलाही रबर बँड घ्या. तो एका कागदावर ठेवून त्याला ताणून वळवून हवा तसा आकार द्या. मात्र हे करताना त्या बँडचे कुठलेही भाग एकमेकांवर पडता कामा नयेत. अशा तऱ्हेने तुम्हाला अनेक प्रकारच्य आकृत्या काढता येतील. चित्र क्रमांक १ मधल्या आकृत्या त्याच प्रकारच्या आहेत.

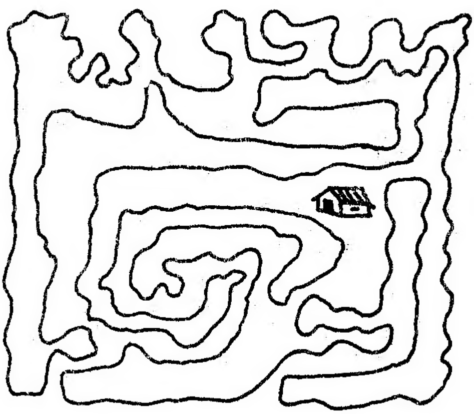
अशी कुठलीही आकृती कागदाचे (वर सांगितल्याप्रमाणे) 'आत आणि 'बाहेर' असे दोन भाग करते.

हेच आहे जॉर्डनचं प्रमेय ! आहे की नाही सोपं? पण ते सिद्ध करणं

अतिशय अवघड आहे. खुद्द जॉर्डनने दिलेला पुरावादेखील पूर्ण बरोबर नव्हता !

कारण गणिताला पाहिजे असलेला पुरावा, व्यापक स्वरूपाचा असतो. वरील उदाहरणात तो सर्व तऱ्हेच्या आकृत्यांना (अर्थात वर दिलेल्या पथ्याप्रमाणे काढलेल्या) लागू पडला पाहिजे.

चित्र क्रमांक २ मध्ये हेच पथ्य पाळून एक आकृती काढली आहे. त्या आकृतीचं एक कुंपण एका माणसाने आपल्या घराभोवती बांधलं. पण ते तयार झाल्यावर त्याला प्रश्न पडला की आपलं घर कुंपणाच्या आत आहे का बाहेर?



**चित्र क्र. २**

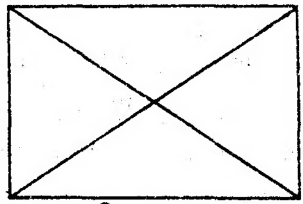
आकृतीवर एक नजर टाकून तुम्ही सांगू शकाल का? जॉर्डनचं प्रमेय याहूनही क्लिष्ट आकृत्यांना लागू पडतं.

**हे करता येतं का बघा !**

रबर बँडप्रमाणेच लवचिक पत्रा वाकवून, ठोकून त्याला वेगळे आकार देता येतात. कुंभाराच्या मातीचा गोळा घेऊन तो दाबून, चेपून वेगवेगळी रूपे त्याला देता येतात. अशा तऱ्हेचा कायापालट (ज्याच्यात कुठेही मोडतोड नाही) केल्यावर तयार होणाऱ्या आकृतींना एक वेगळंच गणित लागू पडतं. त्याला म्हणतात टॉपॉलॉजी (मराठीत 'संस्थिती'). जॉर्डनचं प्रमेय हे ह्या विषयातलं एक प्रमेय आहे.

दिसायला उघड आणि सोपं पण प्रत्यक्ष पुरावा मात्र अवघड अशा

तऱ्हेची प्रमेये ह्या गणिताच्या शाखेत अनेक आहेत; न सुटलेली प्रमेये पण आहेत.



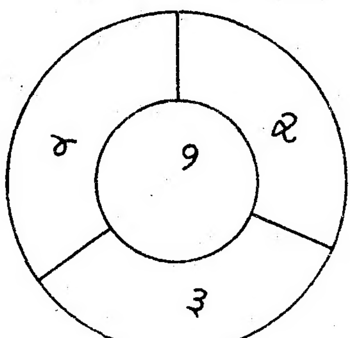
चित्र क्र. ३

सोबतच्या चित्रात दिलेली आकृती पेन्सिलीने गिरवता येईल काय? मात्र कुठल्याही रेषेवर एकापेक्षा जास्त वेळा जायचं नाही आणि पेन्सिल उचलायची नाही.

**चार रंगांचा कूटप्रश्न**

पृथ्वीवर वेगवेगळे देश आहेत (समुद्र हा एक देशच समजू !) त्यांचे नकाशे रंगवायचे आहेत. अट इतकीच की शेजारशेजारचे देश वेगवेगळ्या रंगांनी रंगवले पाहिजेत. लांबचे, एकच सीमाभाग नसलेले देश त्याच रंगाचे चालतील.

असे नकाशे रंगवायला कमीत कमी किती रंग पुरतील?




चित्र क्र. ४

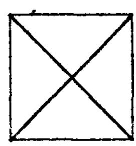
हा पुष्कळ प्रयत्नांनी सुटलेला कूटप्रश्न आहे. चित्र क्रमांक ४ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे कमीत कमी चार रंग तरी पाहिजेत. पण चार रंग पुरेसे आहेत का? नसल्यास पाच रंग आवश्यक असणारी आकृती काढता येईल का?

पहा प्रयत्न करून. उत्तरासाठी लेखांक ५ पहा.

□ □ □

# २. सात पूल आणि दोरीची गाठ

खालील आकृती पेन्सिलीने गिरवता येईल काय? मात्र पेन्सिल एकदा त्या आकृतीवर टेकवली की उचलायची नाही आणि कुठलीही रेषा दोनदा गिरवायची नाही अशी अट. लेखांक १ मध्ये हा प्रश्न विचारला होता.



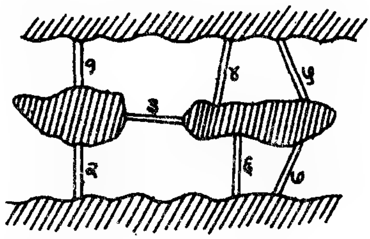
**चित्र क्रमांक १**

या प्रश्नाचं उत्तर असं आहे की, अशा तऱ्हेने ही आकृती गिरवणं शक्य नाही! तुम्ही देखील अनेक प्रयत्न करून हाच निष्कर्ष काढला ना?

हे विधान गणिताने सिद्ध करता येतं - पण ते प्रमेय अवघड आहे. मात्र त्यामागचा इतिहास मनोरंजक आहे. तो असा :

**कोनिग्सबर्गचे सात पूल :**

युरोपच्या नव्हे, पण गणिताच्या इतिहासात गाजलेलं एक लहानसं गाव 'कोनिग्सबर्ग'. तिथे नदी होती आणि तिच्यावर सात पूल होते. हे पूल त्या नदीतल्या दोन बेटांना आणि दोन्ही तीरांना एकमेकांशी जोडत होते. त्यांची रचना चित्र क्रमांक २ मध्ये दाखवली आहे.




**चित्र क्रमांक २**

ह्या सर्व पुलांवरून एकदा आणि फक्त एकदाच चालत जाता येईल काय? अनेकांनी प्रयत्न केला, पण त्यांना ते जमलं नाही. मग ही गोष्ट अशक्य समजावी का? कोनिग्सबर्गला भेट देणाऱ्या अनेक विद्वानांना हा प्रश्न विचारून गावकरी दमले. अखेर त्या प्रश्नाचं समाधानकारक उत्तर ऑयलर नावाच्या प्रख्यात गणितज्ञाने दिलं. हे उत्तर शोधायला ऑयलरलासुद्धा पुष्कळ डोकं खाजवावं लागलं. पण शेवटी त्याने शोधून काढलेला नियम कोनिग्सबर्गच्या सात पुलांनाच लागू होत नव्हता, तर त्याशिवाय इतरही अनेक प्रश्नांची उत्तरं देऊ शकत होता. उदाहरणार्थ चित्र क्र. १ मधल्या आकृतीलाही तो लागू पडत होता.

कोनिग्सबर्गच्या गावकऱ्यांना ऑयलरने काय उत्तर दिलं?

**ऑयलरचा नियम**

प्रथम आपण ऑयलरचा नियम समजावून घेऊ. चित्र क्र. १ मधल्या आकृतीत काही बिंदू असे आहेत जिथे अनेक रेषा येऊन मिळतात. अशा बिंदूंना आपण 'ठिकाण' म्हणू आणि दोन ठिकाणांना जोडणाऱ्या रेषांना 'पूल' म्हणू. चित्रात दाखवल्याप्रमाणे चार ठिकाणे (आकृतीतल्या ४ टोकांना) अशी आहेत, जिथून प्रत्येकी तीन पूल सुरू होतात आणि एक ठिकाण असं आहे (मध्यावर) जिथून चार पूल निघतात. पेन्सिलीने आकृती गिरवणे आणि पुलावरून पायी जाणे ही सारखीच क्रिया आहे हे ह्या प्रश्नांच्या संदर्भात तुमच्या लक्षात आलं असेलच. त्याचप्रमाणे 'ठिकाण' हे चित्र क्र. १ प्रमाणे बिंदुवत असलं काय किंवा चित्र क्र. २ मधल्या बेटांप्रमाणे (आणि तीरांप्रमाणे) पसरलेलं असलं काय, याचा ह्या प्रश्नांच्या उत्तराशी संबंध येत नाही. मात्र दोन्ही आकृत्यांत

ठिकाणांची आणि पुलांची रचना वेगळी आहे. आता ऑयलरचा नियम असा :

कुठल्याही आकृतीत अशी किती ठिकाणं आहेत जिथून विषम संख्येने (म्हणजे २ ने निःशेष भाग न जाणाऱ्या संख्येने) पूल निघतात, याची नोंद करा. जर ती संख्या २ पेक्षा जास्त असेल तर ती आकृती गिरवणं (दिलेल्या नियमाप्रमाणे) शक्य नाही. जर ती संख्या २ असेल तर हे शक्य आहे, मात्र गिरवण्याला सुरवात अशा ठिकाणापासून केली पाहिजे, जिथून विषम संख्येने पूल निघतात. जर ही संख्या २ पेक्षा कमी असेल तर ही आकृती कुठूनही सुरू केल्यास गिरवता येईल. आता हा नियम वापरूया. आपण नुकतंच पाहिलं की चित्र क्र. १ मधल्या आकृतीत अशी चार ठिकाणं आहेत जिथून तीन (म्हणजे विषम संख्येने) पूल निघतात. म्हणून ही आकृती गिरवता येणार नाही.

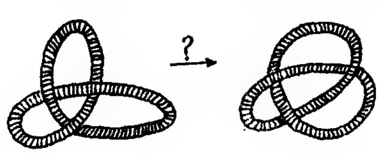
हाच नियम कोनिग्सबर्गच्या पुलांच्या आकृतीला लावून पहा म्हणजे ऑयलरने गावकऱ्यांना काय उत्तर दिलं असेल याची कल्पना येईल !

**दोऱ्यांच्या गाठी आणि गुंतागुंती**

वर नमूद केलेला भाग संस्थिती (टॉपॉलॉजी) ह्या, गणिताच्या शाखेत बसतो. आता संस्थितीतलं एक वेगळं उदाहरण बघा.

दोऱ्यांच्या काही गाठी सुटतात तर काही सुटत नाहीत. काही गुंतागुंती सोडवायला लागलो की त्यांचं दुसऱ्या गुंतागुंतीत रूपांतर होतं. तर कधीकधी दोरीला गाठ नसून नुसता पीळ गेलेला असतो. ह्या सर्व प्रकारांचा सांगोपांग अभ्यास संस्थितीत केला जातो. सोपे वाटणारे काही प्रश्न गहन असतात हे इथेसुद्धा दिसून आलं आहे.

उदाहरणार्थ, चित्र क्रमांक ३ मध्ये दाखवलेल्या दोन गाठींचे परस्परांत रूपांतर होऊ शकेल का? पाहा प्रयत्न करून!

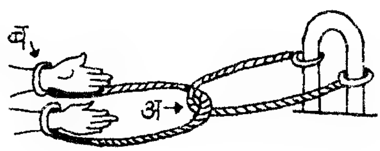



चित्र क्रमांक ३

**उत्तर :** दोन्ही गाठी एकमेकींची आरशातली प्रतिबिंबे आहेत. जरी दिसायला त्यांची रचना सारखी दिसली तरी प्रत्यक्षात हे रूपांतर शक्य नाही हे गणिताद्वारे सांगता येतं.

**सोडवा हे कोडं**

मुले पळविणाऱ्या एका दरोडेखोराने एका दहा वर्षांच्या मुलाला पळवून आणून चित्र क्रमांक ४ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे दोन खांबांना अडकवून ठेवलं. दोरी मजबूत, न तुटणारी होती व मुलाचे हातही त्याभोवतीच्या कड्यातून बाहेर निघू शकत नव्हते. दरोडेखोर निर्धास्तपणे बाहेर गेला. तो परत आला तेव्हा मुलगा पळून गेलेला होता.




**चित्र क्रमांक ४**

हे कसं शक्य झालं?

□ □ □

# ३. ७ + ८ = किती?

एक राजा होता. त्याला दोन मुले होती. त्यांना शिकवायला त्याने एका विद्वान पंडिताची नेमणूक केली. काही दिवसांनी त्यांची परीक्षा पाहण्यासाठी राजाने त्यांना बोलावलं. पंडिताने सांगितलं "महाराज, दोन्ही राजपुत्र हुषार आहेत - पण मोठा माझ्या मते अतिशय हुषार आहे."

"ठीक आहे, मीच त्यांची परीक्षा घेतो." राजा म्हणाला. त्याने दोघा राजपुत्रांना एक गणित घातलं.

'आठ अधिक सात म्हणजे किती?"

धाकट्याने लगेच उत्तर दिलं, "पंधरा." राजा खूष झाला. त्याने मोठ्याकडे पाहिलं. तो अजून गप्पच होता! अखेर राजाने त्याला उत्तर देण्यास सांगितलं. मोठा राजपुत्र उत्तरला -

"मी नक्की उत्तर देऊ शकत नाही. पण तुमचा प्रश्न अजून पुरा झाला नाही."

'म्हणजे? त्यात आणखी काय यायला पाहिजे?"

'ही बेरीज कोणत्या नियमाखाली करायची?' राजपुत्राचा प्रतिप्रश्न ऐकून राजा गोंधळून गेला. त्याने पंडिताकडे पृच्छा केली. पंडित म्हणाला, "हा म्हणतो ते बरोबर आहे ! आठ अधिक सात म्हणजे, नेहमीच पंधरा होत नाहीत. ते नियमावर अवलंबून आहे. नियम बदलले की वेगळं उत्तर येऊ शकेल.'

राजा चिडला. 'हा कसला वेडेपणा! नियम वाटेल तसे बदलून कसं चालेल? आठ अधिक सात म्हणजे नेहमीच पंधरा होतात.'

'बाबा चिडू नका.' राजपुत्र शांतपणे म्हणाला, 'नियम वाटेल तसे बदलून चालणार नाही हे खरं; पण तुम्ही म्हणता तेच उत्तर नेहमी बरोबर असंही म्हणता येत नाही.'

'कोड्यात बोलू नकोस. प्रत्यक्ष उदाहरण दे,' राजाने आज्ञा केली.

'ठीक आहे ! समजा, तुम्ही सकाळी आठ वाजता दरबारचं काम पाहायला सुरवात केलीत आणि सात तास काम केलंत. त्यावेळी घड्याळात किती वाजले असतील?'

'तीन.' राजाने दरबारातल्या मोठ्या घड्याळाकडे पाहात म्हटलं.

'जोपर्यंत आपण बारा तासांचे घड्याळ वापरतो तोपर्यंत आठ अधिक सात म्हणजे तीन होतं नाहीत का?'

राजाच्या डोक्यात प्रकाश पडला.

□

अमूर्त गणित शिकणाऱ्याला गणित मांडण्यापूर्वी सर्व आवश्यक आकड्यांची आणि चिन्हांची पूर्ण व्याख्या करावी लागते. बेरीज म्हणजे काय? गुणाकार म्हणजे काय वगैरे प्रश्न त्याला सुरवातीलाच नीट मांडून सोडवावे लागतात. वरील गोष्टीत घड्याळातल्या १ ते १२ अंकापर्यंतच मर्यादित असलेलं वेगळं अंकगणित असू शकतं हे इथे स्पष्ट केलं आहे. १२ च्या पुढला आकडा परत १ असतो. त्यामुळे ह्या अंकगणितात

$$१ + १ = २ \quad २ + २ = ४$$

$$४ + ५ = ९ \quad ७ + ८ = ३$$

$$९ + १० = ७, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

इत्यादि बेरजेचे प्रकार आढळतात. ते चूक आहेत किंवा व्यवहाराला सोडून आहेत असं म्हणता येत नाही. फक्त ते आपल्याला सवयीने माहीत झालेल्यापेक्षा वेगळ्या संदर्भात आहेत इतकंच !

**दोन आकड्यांचे गणित**

आता आपण त्याहून कमी आकड्यांचं गणित पाहू. ते म्हणजे

फक्त दोन आकड्यांचं गणित आणि हे आकडे म्हणजे :

०, १.

इथे लागू पडणारे बेरजेचे नियम म्हणजे :

० + ० = ०, ० + १ = १

१ + १ = ०

हे नियम बनवताना तर्कशास्त्राची कास धरावी लागते. कशी ते आपण पाहू. समजा, आपण सुरवात केली पहिल्या नियमापासून.

० + ० = ०

त्यानंतर ० + १ म्हणजे किती?

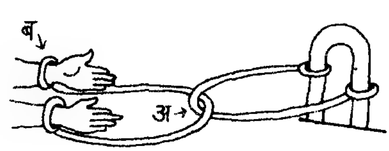
पर्याय दोनच आहेत :

० + १ = ०, ० + १ = १

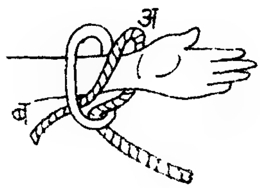
पैकी पहिला पर्याय घेतल्यास पहिल्या नियमाशी तुलना केल्यास ० आणि १ मध्ये काहीच फरक नाही असं दिसून येतं. म्हणून दुसरा पर्याय घ्यावा लागतो. त्याचप्रमाणे १ + १ करता जे दोन पर्याय आहेत; त्यातला १ + १ = ० हाच बरोबर हे थोडा विचार केल्यास (आणि पहिल्या दोन नियमांशी तुलना केल्यास) दिसून येईल.

हे लहानसं गणित व्यवहारात कुठे लागू पडतं?

**लेखांक २ मधील कोड्याचे उत्तर**




**खांबाला बांधलेल्या दोराचे टोक 'अ' हाताभोवतालच्या रिंग मधून 'ब' ह्या ठिकाणातून बाहेर काढून त्या हाताच्या बोटावरून न्यावे.**




म्हणजे दोन्ही दोरांची गुंतागुंत सुटेल. मात्र हे दोन्हीपैकी एका हाताभोवतीच जमेल !

□ □ □

# ४. दोन आकड्यांचे गणित

लेखांक ३ मध्ये दोन आकड्यांच्या गणिताचे उदाहरण विचारले होते. दोन आकडे म्हणजे ० आणि १. त्यांच्या गणिताचे नियम खालीलप्रमाणे असतात.

० + ० = ०,   ० + १ = १,   १ + १ = ०

त्या गणिताचे एक उदाहरण दिव्याच्या बटनात सापडते. ह्या बटनाच्या दोन स्थिती असतात. दिवा लावलेली (ON) आणि दिवा न लावलेली (OFF) अशी ह्या दोन स्थितींना नावे देऊ. कुठल्याही परिस्थितीत बटन दाबले की फरक होतो; ON चे OFF आणि OFF चे ON परत एकदा दाबले की परिस्थिती पूर्ववत् होते. 'पूर्ववत स्थिती'बद्दल ० आणि 'बदललेली स्थिती'बद्दल १ हा आकडा वापरला की वरील गणिताचा प्रत्यय येतो.

व्यवहारात कुठलीही संख्या लिहिण्याकरता आपण ० ते ९ पर्यंत दहा अंक वापरतो. ते का? माणसाला दहा बोटे असतात व मोजण्याच्या सोयी करता दहा हा आकडा वापरात आला असावा. पण ह्याचा अर्थ 'दहा'मध्ये असा विशेष काही गुण नाही तो इतर संख्येत नाही. जर आपण ० ते ७ हे आठ आकडे वापरले असते तरी आपल्याला कुठलीही संख्या लिहिता आली असती. उदाहरणार्थ 'आठ' ही संख्या कशी लिहायची? दशांक पद्धतीत आपण जसे ९ नंतरचा आकडा नसल्याने 'दहा' ही संख्या

१० अशी लिहितो तसेच अष्टांक पद्धतीत 'आठ' लिहायला १० वापरावे लागतील. ह्याच पद्धतीत 'सतरा' म्हणजे २१. इतर संख्या वाचकांनी अष्टांक पद्धतीत लिहून पहाव्यात.

हे संख्या लिहिण्याचं काम आपण दहा ऐवजी आठ अंकांनी करू शकतो. हेच काम कमीत कमी किती अंकांनी होईल? कमीत कमी दोनच अंक लागतील : ० आणि १. ह्या दोन अंकांचे अंकगणित कुठलीही संख्या लिहिण्यात किंवा त्यांची बेरीज-वजाबाकी, गुणाकार-भागाकार करण्यात आपल्या नेहमीच्या अंकगणिताइतकेच क्षम आहे.

३ × ७ = २१

हा गुणाकार दोन अंकांच्या अंकगणितात कसा दिसेल?

```
     ११
  × १११
 -------
     ११
    ११
   ११
 -------
  १०१०१
```

हा गुणाकार नेहमीच्या बाळबोध पद्धतीनेच केलेला आहे; फक्त १ पलीकडे गेले की दोन = १० हे ध्यानात ठेवावं लागतं.

आधुनिक गणकयंत्रांना ० आणि १ ह्या आकड्यांची कल्पना वर सांगितलेल्या 'स्विच' च्या उदाहरणाने दिली जाते. त्यामुळे ते ह्या दोन आकड्यांच्याद्वारेच कुठलीही संख्या लिहितात. आपणही हे दोनच आकडे का वापरत नाही? अर्थात दहा अंकांची आपल्याला सवय आहे हे कारण सोडले तरी व्यवहाराच्या दृष्टीने कुठलीही संख्या ह्या दोनच आकड्यात खूपच लांबलचक होते हे वरील गुणाकाराच्या उदाहरणाने लक्षात येण्याजोगं आहे.

**आळशी मुलाची गोष्ट :**

एका गणित्याचा मुलगा स्वभावाने आळशी होता. तो काही केल्या गुणाकार शिकायला तयार होत नव्हता. फार तर २ ह्या आकड्याने

गुणाकार भागाकार करायची त्याची तयारी होती. मग त्याच्याकडून गुणाकार कसा करून घ्यायचा? शेवटी त्याच्या वडिलांनी एक युक्ती योजली. आपल्या चिरंजीवांना बेरीज-वजाबाकी आणि २ ने गुणाकार-भागाकार येवढंच येतं याचा विचार करून त्यांनी त्याला खालील पद्धत शिकवली. ती पद्धत एका उदाहरणाने समजावून घेऊया.

७ × १७ = ११९

हा गुणाकार कसा करायचा ?

कागदाच्या एका बाजूला १७ आणि दुसऱ्या बाजूला ७ लिहा. नंतर १७ ला २ ने भागा आणि ७ ला २ ने गुणा आणि त्या त्या आकड्यांच्या खाली लिहा.

| | |
|---|---|
| १७ | ७ |
| ८ | १४ |

ह्यात १७ ला २ ने भागल्यावर उरलेली बाकी १ असते. पण तिकडे दुर्लक्ष करा. हाच प्रकार पुढे चालू ठेवा. अखेर डावीकडे फक्त १ येतो.

| | | |
|---|---|---|
| १७ | ७ | |
| ८ | १४ | ← |
| ४ | २८ | ← |
| २ | ५६ | ← |
| १ | ११२ | |

आता डावीकडल्या स्तंभात २ ने भाग जाणारे जे जे आकडे असतील त्यांच्या समोरच्या उजव्या स्तंभातील संख्या बाजूला काढा. वर त्या संख्या बाणाने दाखवल्या आहेत. उरलेल्या संख्यांची बेरीज म्हणजेच हवे असलेले उत्तर.

```
   ७
+ ११२
-----
 ११९
```

त्या मुलाला ह्या पद्धतीने गुणाकार करता येऊ लागला. तुम्ही पण हा नियम वापरून पहा आणि ........

ह्या नियमाचे गुपित ० आणि १ च्या अंकगणिताने चटकन कळेल. शोधायचा प्रयत्न करा!

□ □ □

# ५. उत्तर सापडलं ?

लेखांक १ मध्ये एक कूट प्रश्न दिला होता : एका कागदावर अनेक देश असलेला नकाशा रंगवायला कमीत कमी किती रंग लागतील? शेजार-शेजारचे देश-म्हणजे ज्यांची सीमारेषा काही भागात एकरूप होते असे - वेगळ्या रंगाने रंगवणे आवश्यक आहे.

पाच रंग हे काम करायला पुरे आहेत. पण चारच रंग पुरतील का? प्रश्नाचं उत्तर 'होय' असं आहे. हे उत्तर अिलिनॉय युनिव्हर्सिटीच्या हाकन (Haken) आणि आपेल (Appel) ह्या गणिततज्ज्ञांनी शोधून काढलं. त्यासाठी त्यांना कंप्यूटरचा आसरा घ्यायला लागला. कंप्यूटरने हे गणित सोडवायला १२०० तासांचा अवधी घेतला.

कुठलंही गणित - लहान किंवा मोठं - सोडवताना मानवी मेंदूला 'होय', 'नाही' अशा प्रकारचे अनेक तर्कसंगत निर्णय घ्यावे लागतात. आपेल आणि हाकन ह्यांनी हाती घेतलेल्या गणितात असे दहा अब्ज निर्णय घ्यावे लागणार होते ! म्हणून कंप्यूटरची आवश्यकता भासली.

ह्या प्रश्नाचं ह्याहून सुटसुटीत उत्तर सापडेल असंही काही गणिततज्ज्ञांना वाटतं.

**अशी घडी घालता येईल ? :**

समजा, तुमच्याकडे ऐसपैस पण तलम कापडाचा एक टॉवेल आहे. त्याची एक घडी घातली, की त्याचं क्षेत्रफळ निम्मं आणि जाडी दुप्पट होते.

अशा तऱ्हेने तुम्ही तीस वेळा घड्या घातल्या तर टॉवेलची जाडी किती होईल? मुळात त्याची जाडी एक-दशांश मिलिमीटर म्हणजे मीटरच्या हजाराव्या भागाचा दहावा भाग - इतकी असली तर घड्या घातल्यावर ती साधारणपणे किती होईल? इथे चार पर्याय सुचवले आहेत :

१. एक मीटर किंवा कमीच

२. शंभर मीटर

३. एक ते दहा किलोमीटर

४. दहा किलोमीटरहून जास्त

तुम्ही हिशोब करून पहा म्हणजे उत्तराने तुम्हालाच आश्चर्य वाटेल. (आणि प्रत्यक्षात अशा घड्या घालणे किती अवघड असेल याचीही कल्पना येईल.)

**सर्वच अनंत सारखे नसतात :**

वरील प्रश्नात सतत २ ने गुणत गेल्यास किती मोठी संख्या तयार होत जाते याची कल्पना देण्याचा प्रयत्न केला आहे. तर सर्वात मोठी संख्या कोणती?

'अनंत' किंवा Infinitiy ही संख्येची कल्पना, अशा मोठ्या-वाढत जाणाऱ्या - संख्यांतूनच निर्माण झाली आहे. आपण म्हणतो :

१, २, ३, ४, ................. (∞)

हा क्रम वाढत वाढत अनंताला जाऊन भिडतो. ह्या क्रमाच्या शेवटी अनंत हे '∞' ह्या चिन्हाने सूचित केलं जातं.

अनंतात अनंत मिळवला तरी अनंत हेच उत्तर येतं.

$$\infty + \infty = \infty$$

हाच नियम गुणाकाराला पण लागू आहे.

$$\infty \times \infty = \infty$$

पण सर्वच अनंत सारखे असतात का?

नाही !

**दोन प्रकारचे अनंत :**

वरील आश्चर्यकारक उत्तराचा खुलासा असा - आपण वर १, २, ३, ४ – अशा संख्यांचा क्रम लावला ज्याचा शेवट अनंतात होतो. पण आपल्याला ह्या क्रमात अमुक एक नंबरची संख्या व्यवस्थित शोधून काढता येते. उदाहरणार्थ, हजारावी संख्या म्हणजे १०००, दहा हजारावी म्हणजे १००००.

अशा प्रकारच्या ∞ ला 'मोजण्याजोगा अनंत' म्हणतात.

ह्याची काही उदाहरणे पहा : खालील न संपणारा अनुक्रम

२, ४, ६, ८ ———

हा सर्व सम संख्यांचा आहे. म्हटले तर हा अनुक्रम आधी नमूद केलेल्या

१, २, ३, ४ ———

ह्या अनुक्रमात समाविष्ट आहे. पण दोन्ही अनुक्रमात, मोजण्याइतक्या अनंत (∞) संख्या आहेत. २, ४, ६, ८ – ह्या अनुक्रमात अमुक एक क्रमाची संख्या सांगता येते. उदाहरणार्थ, हजारावी संख्या म्हणजे २०००, दहा हजारावी संख्या म्हणजे २०,०००.......

दुसरे उदाहरण : ० ते १ च्या दरम्यानच्या व्यवहारी अपूर्णांकांचे. (एका पूर्णांकाला दुसऱ्या पूर्णांकाने भाग दिल्यास निर्माण होणारा अपूर्णांक म्हणजे व्यवहारी अपूर्णांक) हा अनुक्रम खालीलप्रमाणे तयार करता येतो :

$$\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{२}{३}, \frac{१}{४}, \frac{२}{४}, \frac{३}{४}, \frac{१}{५}, \frac{२}{५}, \frac{३}{५}, \frac{४}{५},$$

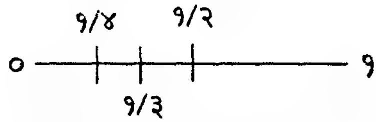
हा अनुक्रम वाढत्या क्रमाने नाही. तसेच एकच अपूर्णांक अनेक वेळा वरील अनुक्रमात येतो. उदाहरणार्थ $\frac{१}{२}, \frac{२}{४}, \frac{३}{६}$ हे सर्व एकच अपूर्णांक दर्शवतात.

परंतु ह्या अनुक्रमात ० ते १ च्या दरम्यानचे सर्व व्यवहारी अपूर्णांक आहेत. आणि त्यांचा क्रम लावता येतो.

उदाहरणार्थ १०० वा अपूर्णांक ९।१५ आहे. (१००० वा अपूर्णांक शोधून काढा.)

म्हणून ० ते १ च्या दरम्यानच्या सर्व व्यवहारी अपूर्णांकांची संख्या मोजण्याइतकी अनंत आहे.

त्या उलट काही अनंत असे असतात, की ज्यांची वरप्रमाणे क्रम लावून मोजदाद करता येत नाही. उदाहरणार्थ, खालील चित्रात एक युनिट लांब सरळ रेषा काढली आहे.




० ते १ च्या दरम्यानचे अपूर्णांक ह्या रेषेवर दाखवता येतात. १।२, १।४, १।३ हे प्रत्यक्ष दाखवले आहेत ते व्यवहारी अपूर्णांक आहेत. अशा प्रकारच्या सर्व व्यवहारी अपूर्णांकांनी ही रेषा भरून जाईल का? रेषेवर अनंत बिंदू आहेत आणि व्यवहारी अपूर्णांकही अनंत आहेत. पण वास्तविक बिंदूंचा अनंत हा व्यवहारी अपूर्णांकांच्या अनंतापेक्षा मोठा आहे आणि हा अनंत १, २, ३, ४ — ह्या क्रमाने मोजण्यासारखा नाही !

म्हणजे ह्या रेषेवरच्या बिंदूंचा असा कुठलाच क्रम लावता येणं शक्य नाही की ज्यामुळे कुठलाही बिंदू त्यामध्ये अमुक नंबरचा (म्हणजे १०० वा किंवा १००० वा इ.) असं सांगता येईल. हे गणिताने सिद्ध करता येतं.

त्यामुळे सगळेच अनंत सारखेच असतात असं गणिती कबूल करणार नाहीत !

□ □ □

# ६. दोनच पर्याय : सत्य किंवा असत्य

कोणतंही प्रमेय सिद्ध करायला गणितज्ञाला तर्कशास्त्राच्या नियमांचा उपयोग करावा लागतो. ह्यापैकी एका विशिष्ट नियमाचा प्रयोग गणितात अनेक वेळा केला जातो आणि तो म्हणजे असा :

'अमुक एक विधान सत्य तरी असेल किंवा असत्य तरी असेल. आणखी तिसरा पर्याय नाही.'

समजा, 'अ' हे एक विधान आहे आणि ते सत्य आहे असं सिद्ध करायचं आहे. कधी कधी 'अ' ची सत्यता प्रत्यक्ष सिद्ध करणं अवघड असतं म्हणून गणिती वेगळा मार्ग अवलंबितो. तो असं गृहीत धरतो की 'अ' हे असत्य आहे. तसं गृहीत धरलं तर त्यातून कायकाय निष्कर्ष निघतील? जर त्यापैकी एखादा निष्कर्ष असत्य किंवा पूर्वी सिद्ध केलेल्या नियमांशी विसंगत निघाला तर "अ असत्य आहे" हे विधान चूक ठरतं आणि पर्यायाने 'अ' सत्य आहे असा निष्कर्ष निघतो.

ह्याची दोन उदाहरणे खाली दिली आहेत.

**कुतूहलजनक संख्या किती? :**

मागील लेखात १, २, ३..... इत्यादि आकड्यांची संख्या असंख्य आहे असं म्हटलं होतं. त्यातील कुतूहलजनक गुण असलेल्या संख्या किती असतील? इथे कुतूहलजनक गुण म्हणजे कोणताही गुण समजावा, ज्यामुळे ती संख्या आपलं लक्ष आकर्षित करू शकेल. उदाहरणार्थ, १११

ह्या संख्येमध्ये सर्वच अंक १ आहेत, हा गुण आहे. ४ ह्या संख्येत असा गुण आहे की ती २ × २ किंवा २ + २ अशी दोन प्रकारे लिहिता येईल.

तर अशा काही ना काहीतरी विचित्र गुण असलेल्या संख्या किती असतील? आपल्याला वाटतं की अशा असंख्य संख्या असतील. पण हे सिद्ध कसं करायचं? एक पद्धत अशी – 'अ' हे एक विधान करा :

अ : कुतूहलजनक संख्या अनंत आहेत.

समजा 'अ' असत्य आहे. म्हणजे अशा आकड्यांची संख्या परिमित आहे. तसं असलं तर त्यातील सर्वात मोठी संख्या कुठली हे सांगता येईल. समजा, ही संख्या 'क' ह्या अक्षराने दाखवता येईल.

म्हणजे 'क' पेक्षा मोठ्या सर्व संख्या कुतूहलशून्य आहेत. आणि 'क + १' ही संख्या अशा सर्व संख्यात पहिली आहे.

पण कसलंही वैचित्र्य नसलेल्या संख्यांत सर्वात लहान असणं हाही एक कुतूहलाचा विषय नव्हे का?

म्हणून 'क + १' ह्या संख्येत पण कुतूहलजनक गुण आहे. पण 'क' ही संख्या असा गुण असलेल्या संख्यांत सर्वात मोठी असं आपण नुकतंच म्हटलं नाही का? आणि 'क + १' ही 'क' पेक्षा मोठी आहे.

ही विसंगती आढळल्यामुळे 'अ' हे विधान असत्य आहे हा आपला समज चुकीचा ठरतो. म्हणून 'अ' हे सत्य आहे असं सिद्ध होतं!

**हा माणूस कुठल्या जातीचा? :**

एका बेटावर दोन जातीचे लोक होते. एका जातीचे लोक नेहमी खरं बोलायचे तर दुसऱ्या जातीचे लोक नेहमी खोटं बोलायचे. एकदा परदेशातला एक माणूस तेथे आला. त्याला तीन लोक बरोबर जाताना दिसले. आपण त्यांना 'अ', 'ब', 'क' म्हणू.

त्याने 'अ' ला विचारलं, "तू कोणत्या जातीचा?"

'अ' काहीतरी पुटपुटला. पण ते, प्रश्न विचारणाऱ्याला कळलंच नाही.

"काय म्हणाला तो?" त्याने 'ब' आणि 'क' ना विचारलं.

"तो म्हणतो मी खरं बोलणारा आहे" 'ब' उत्तरला.

"नाही! तो म्हणाला मी खोटं बोलणारा आहे" 'क' ने त्याला खोडून काढलं.

प्रश्न असा : 'ब' आणि 'क' कुठल्या जातीचे होते?

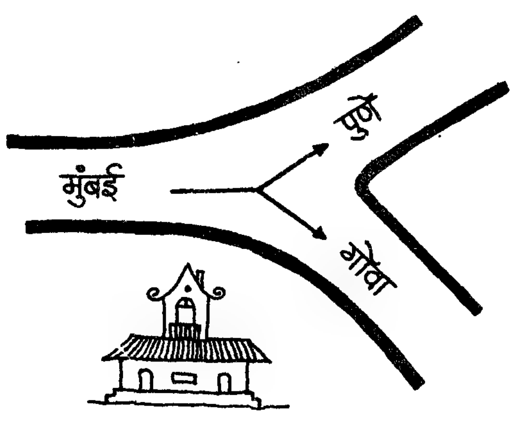
हा प्रश्न सोडवायला वरील तंत्राचा अवलंब करू. समजा, 'क' खरं बोलणारा आहे. म्हणजे 'अ' म्हणाला की तो स्वतः खोटं बोलतो. जर 'अ' हा खरं बोलणारा असता तर त्याने विचारलेल्या प्रश्नाचं उत्तर दिलं असतं की 'मी खरं बोलणारा आहे. जर 'अ' हा खोटं बोलणारा असता तरी त्याने हेच उत्तर दिलं नसतं का? कुठल्याही परिस्थितीत 'मी खोटं बोलणारा आहे' असं 'अ' म्हणणार नाही. म्हणजे 'क' चं विधान खोटं ठरतं - म्हणून तो खरं बोलणारा नाही - खोटं बोलणारा आहे.

पर्यायाने 'ब' खरं बोलणारा ठरतो.

अशा तऱ्हेच्या युक्तिवादावर आधारलेली काही कोडी खाली देत आहे. पहा सोडवण्याचा प्रयत्न करून.

**(१) खोटं कोण बोलला?**

मुंबई, पुणे आणि गोवा ह्या तीन ठिकाणी जाणारे रस्ते एका ठिकाणी मिळतात (पुढील चित्र पहा) आणि त्या ठिकाणी एक घर आहे.




त्यात दोन भाऊ राहतात. एक भाऊ नेहमी खोटं बोलतो तर दुसरा नेहमी खरं बोलतो. एक माणूस मुंबईहून ह्या ठिकाणी आला. त्याला

पुण्याला जायचं होतं पण रस्त्यांची नावं कुठेच नव्हती. तेव्हा त्याने ह्या घराचे दार ठोठावलं आणि दोघा भावांना प्रत्येकी एकच आणि तोच प्रश्न विचारला. त्यांच्या उत्तरावरून त्याला सांगता आलं की खरं बोलणारा कोण आणि खोटं बोलणारा कोण. शिवाय त्याला पुण्याचा रस्ता कुठला ही पण माहिती मिळाली.

त्याने विचारलेला प्रश्न कोणता?

**(२) राजाने प्रधान कोणाला नेमले?**

एका राजाला प्रधान नेमायचा होता. त्याने हुशार पंडितांना बोलवून सर्वात विचारवान पंडित नेमायचं ठरवलं. निवड करता करता शेवटी तीन पंडित उरले. त्यांची परीक्षा घेण्याकरता त्याने सर्वांना एका टेबलाभोवती बसवलं आणि त्यांचे डोळे बांधून सांगितलं : "तुमच्या प्रत्येकाला कपाळावर लाल किंवा पांढरे गंध लावण्यात येईल. डोळ्यांची पट्टी काढल्यावर तुम्ही एकमेकांकडे पाहा. ज्याला कोणाला दुसऱ्याच्या कपाळावर (एकाच्या किंवा दोघांच्या) लाल गंध दिसेल त्याने हात वर करायचा."

राजाने प्रत्येकाच्या कपाळावर लाल गंध लावलं. पट्टी काढल्यावर तिघांचे हात वर झाले.

"आता ओळखा पाहू स्वतःच्याच गंधाचा रंग!" राजाने आव्हान दिलं.

बराच वेळ विचार केल्यावर त्यातल्या सर्वात हुशार पंडिताने सांगितलं, "माझं गंध लाल रंगाचं आहे" त्याला प्रधानकी मिळाली.

त्याने कुठला युक्तिवाद केला असेल?

**(३) हुशार पालक**

एका शाळेत दहा व्रात्य विद्यार्थी होते. प्रत्येकाचे पालक वेगळे होते. अनेक वेळा दम भरूनही हे विद्यार्थी वठणीवर आणायला त्यांच्या मास्तरांना जमलं नाही. ते हेडमास्तरांकडे गेले आणि त्यांनी सर्व परिस्थिती निवेदन केली.

"हे काम शेवटी पालकांवर सोपवलं पाहिजे. मी सर्वच पालकांना एक नोटीस पाठवतो." हेडमास्तर म्हणाले. त्यांनी शाळेतल्या सर्व

विद्यार्थ्यांच्या पालकांना पत्रे पाठवली :

"ह्या शाळेत काही विलक्षण व्रात्य विद्यार्थी आहेत. तुम्हाला तुमचा मुलगा व्रात्य असल्याची खात्री असल्यास शाळेत येऊन प्रार्थनेनंतर सर्व विद्यार्थ्यांसमोर तुम्ही त्याला समज द्यावी."

गंमत म्हणजे प्रत्येक पालकाला इतर मुलांची ते व्रात्य आहेत का नाही याची माहिती होती. पण स्वतःच्या मुलाचीच खात्री नव्हती. पण दुसऱ्याला विचारणं त्यांना कमीपणाचं वाटत होतं. म्हणून त्यांनी तर्कशास्त्राचा उपयोग केला.

पहिल्या दिवशी कोणीच पालक आपल्या मुलांना शिक्षा करायला आले नाहीत.

दोन दिवस झाले - तिसरा दिवस गेला - काही घडलं नाही.

मास्तरलोक हेडमास्तरांकडे गेले, "अहो, तुमच्या पत्राचा काही उपयोग झालेला नाही. पालकांनी दखल घेतली नाही आणि व्रात्यपणा तर जोरात आहे."

"जरा दमाने घ्या ! पालकलोक हुशार आहेत. योग्य वेळी आपलं कर्तव्य बजावतील." हेडमास्तर आत्मविश्वासाने म्हणाले.

आणि खरोखरच दहाव्या दिवशी दहाही व्रात्य मुलांच्या पालकांनी येऊन आपल्या रत्नांचा योग्य तो समाचार घेतला !

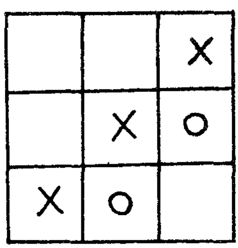
त्यांनी कसा तर्क केला असेल? ते इतके दिवस का थांबले?

उत्तरे लेखांक ९ मध्ये पहा.

□ □ □

# ७. गोळाफुलीचा खेळ

बहुतेकांना हा खेळ परिचित असेलच. चित्र क्रमांक १ मध्ये दिलेल्या आकृतीत नऊ भाग (सेल) आहेत.




**चित्र क्र. १**

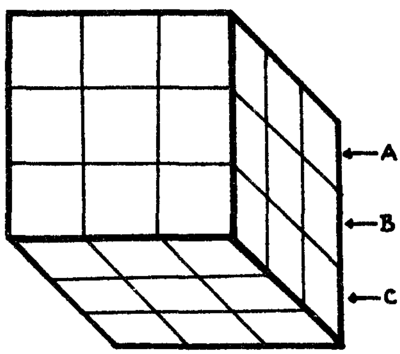
दोघा प्रतिस्पर्धी खेळाडूंनी क्रमाक्रमाने एकेका सेलमध्ये × किंवा ० भरायचे : एकाने फुली, दुसऱ्याने गोळा. जो एका सरळ रेषेत × किंवा ० प्रथम काढून दाखवेल तो जिंकला. चित्र क्र. १ मध्ये फुलीवाल्याने डाव जिंकला आहे. अर्थात पुष्कळ वेळा हा सामना अनिर्णित राहतो. कारण पारस्परिक विरोधामुळे कोणालाच स्वतःचं चिन्ह एका सरळरेषेत काढता येत नाही.

वरील आकृतीत एकंदरीत ८ सरळ रेषा आहेत - तीन उभ्या, तीन आडव्या आणि दोन कर्णांच्या. एका मोठ्या चौकोनाचे तीन बाय तीन

असे नऊ भाग केले आहेत आणि प्रत्येक सेलमध्ये गोळा किंवा फुली काढता येते.

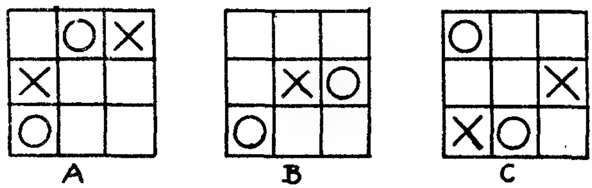
**एक नवीन खेळ :**

आता ह्यापेक्षा अधिक बुद्धिरंजक खेळ पाहूया. दोन डायमेन्शान्स-मध्ये (म्हणजे एका समतलावर) चौकोन काढण्याऐवजी तीन डायमेन्शान्समध्ये एक घनाकृती ठोकळा काढूया. (पहा चित्र क्र. २) त्याचे तीन बाय तीन असे २७ भाग केले की प्रत्येक भाग म्हणजे एक लहान घनाकृती ठोकळा होतो. त्याला सेल म्हणू या.




**चित्र क्र. २**

आता दोघा प्रतिस्पर्ध्यांनी फुली आणि गोळा क्रमाने प्रत्येक सेलमध्ये काढावेत, अशा तऱ्हेने की प्रत्येकाचा प्रयत्न स्वतःची तीन चिन्हे (× किंवा ०) एका रेषेत बसतील अशा जास्तीत जास्त सरळ रेषा असाव्यात हा.




**चित्र क्र. ३**

अर्थात ही घनाकृती काढून त्यात × किंवा ० लिहिणे अवघड आहे. त्यावर उपाय म्हणजे चित्र क्र. ३ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे एकाखाली एक असे तीन चौकोन काढणे.

प्रत्येक चौकोन चित्र क्र. १ प्रमाणे ९ सेल मध्ये विभागला आहे. हें तीन चौकोन ABC एकावर एक ठेवले की चि. क्र. २ मधली आकृती तयार होते. तिन्हीत मिळून एकंदर २७ सेल आहेत.

चि. क्र. ३ मध्ये काढलेल्या फुल्यांच्या दोन सरळरेषा आहेत, पण गोळे - कुठलेही तीन - एका सरळ रेषेत नाहीत हे, ह्या चित्राचं व्यवस्थित अवलोकन केल्यास दिसून येईल.

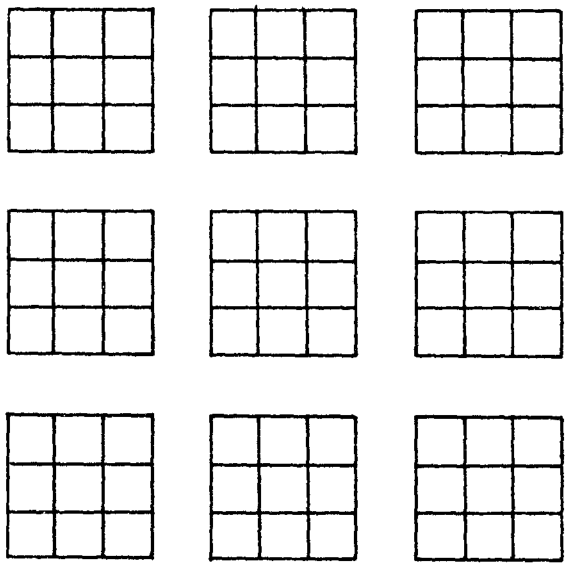
हिशोब केल्यावर दिसून येईल की तीन सेल सरळ रेषेत असलेल्या एकंदर ४९ सरळरेषा घनाकृती ठोकळ्यात असतात. अर्थात दोन प्रतिस्पर्धी खेळाडू एकमेकांच्या मार्गात अडथळे आणणार म्हणून दोघांचे 'स्कोअर' बेरीज केल्यावर ४९ पेक्षा पुष्कळच कमी भरतील.

**चार डायमेन्शन्सचा 'अपघन' :**

चौकोनाला लांबी-रूंदी असे दोन डायमेन्शन्स असतात तर ठोकळ्याला लांबी-रूंदी-उंची असे तीन डायमेन्शन्स आहेत. त्या पुढची पायरी म्हणजे 'चार' डायमेन्शन्सची. आपल्याभोवतीचे विश्व तीन डायमेन्शन्सचे असल्याने चार डायमेन्शन्सचा 'अपघन' (हायपरक्यूब) अस्तित्वात दिसणार नाही. पण गणिततज्ज्ञाला त्याची कल्पना करता येणं शक्य आहे.

अशा अपघनात प्रत्येक बाजूचे तीन भाग केले की ३ × ३ × ३ × ३ = ८१ छोटे अपघनांचे सेल तयार होतात. तीन घनाकृती ठोकळे ओळीत ठेवून ह्या 'अपघना'ची थोडी कल्पना येईल - ज्याप्रमाणे चित्र क्र. ३ मध्ये तीन चौकोन एका कॉलममध्ये मांडले आहेत.

अशा अपघनातसुद्धा गोळा-फुलीचा खेळ खेळणे शक्य आहे. नियम ठोकळ्याबाबत वापरले तेच. हा खेळ खेळण्यासाठी अपघनाचा आराखडा खालीलप्रमाणे काढावा.



**चित्र क्र. ४**

तीन डायमेन्शन्समध्ये खेळल्यावर मगच चार डायमेन्शन्समध्ये खेळण्याचा प्रयल करावा. (तीन सेल एका सरळ रेषेत आहेत अशा २७२ रेषा अपघनात काढता येतात!)

□ □ □

# ८. ... तर त्याचं घर कुठे होतं ?

(१) एका गृहस्थाने आपल्या घराभोवती गोल भिंत बांधली आणि त्या भिंतीत बाहेर पाहायला खिडक्या केल्या. पण गंमत अशी की कुठल्याही खिडकीतून बाहेर पाहिलं, की त्याला दक्षिण दिशा दिसे. त्याचं घर कुठे होतं?

(२) एक गृहस्थ आपल्या घरातून निघून सरळ दिशेने एक मैल चालत गेला. त्याच्या लक्षात आलं की आपण दक्षिणेकडे जात आहोत. मग दिशा बदलून तो मैलभर पश्चिमेकडे गेला आणि परत दिशा बदलून मैलभर उत्तरेकडे चालत आला - तो थेट आपल्या घरीच पोचला ! त्याचं घर कुठे होतं?

ह्या दोन्ही प्रश्नाचं एकच उत्तर आहे : त्या गृहस्थाचं घर उत्तर ध्रुवावर होतं.

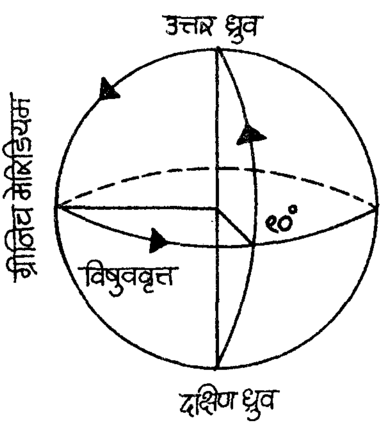
ह्यावरून असा ग्रह होण्याचा संभव आहे, की उत्तर ध्रुवात काहीतरी वैशिष्ट्य आहे.

पृथ्वी बरोबर गोलाकार आहे असं गृहीत धरलं (वस्तुस्थिती तशी नाही ह्या तपशिलाशी आपल्याला इथे कर्तव्य नाही) तर त्यावरील प्रत्येक बिंदू सारखाच. वरील कोड्यात उत्तर ध्रुवाला महत्त्व प्राप्त होतं. कारण आपण उत्तर - दक्षिण वगैरे दिशा ठरवायला उत्तर ध्रुव कोणीकडे आहे ह्याची दखल घेतो. पृथ्वी दोन्ही ध्रुवांना जोडणाऱ्या अक्षाभोवती फिरते,

म्हणून आकाशातलं तारामंडळ फिरताना दिसतं - फक्त अक्षाच्या दिशेने उत्तरेकडे असलेला ध्रुवतारा स्थिर असलेला दिसून येतो. ह्याच ध्रुवताऱ्याच्या मदतीने समुद्रावरचे खलाशी दिशा ठरवू लागले ......

पण जर पृथ्वी अक्षाभोवती फिरत नसती तर कुठलेही (पृथ्वीच्या केंद्रातून काढलेल्या) व्यासाच्या टोकावरचे दोन बिंदू आपल्याला ध्रुव म्हणून गृहीत धरून अक्षांश-रेखांश काढता आले असते, आणि पृथ्वीच्या पृष्ठभागावर दिशा ठरवता आल्या असत्या.

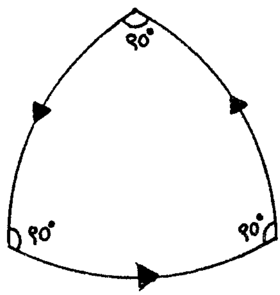
**पृथ्वीच्या पृष्ठभागावरची भूमिती :**




**चित्र क्र. १**

चित्र क्रमांक १ मध्ये पृथ्वीच्या पृष्ठभागाची गोलाकार आकृती दाखवली आहे. समजा, एक गृहस्थ उत्तर ध्रुवावरून ग्रीनिच मेरिडियन (०° चा रेखांश) वरून दक्षिणेकडे निघाला. सरळ (दिशा न बदलता) प्रवास करून तो अखेरीस विषुववृत्तापर्यंत पोचला. तेथे तो दिशा बदलून पूर्वेकडे निघाला. विषुववृत्तावरून सरळ जाऊन शेवटी तो ९०° च्या रेखांशावर पोचला आणि तेथे त्याने पूर्वेपासून उत्तरेकडे मोर्चा वळवला. ह्या रेखांशावरून सरळ जाऊन तो शेवटी परत उत्तर ध्रुवावरच जाऊन धडकेल. मात्र त्याची परत येण्याची दिशा त्याच्या निघण्याच्या दिशेशी काटकोन करून असेल.

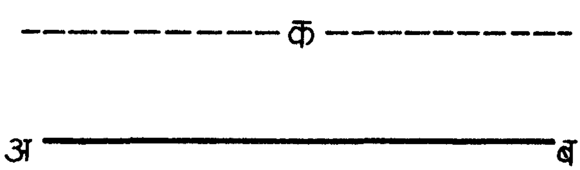
**त्याचा** मार्ग चित्र क्र. २ मध्ये दाखवला आहे. त्याच्या मते तो तीन **वेळा सरळ** रेषांतून गेला (दिशा न बदलता) पण त्याने आखलेला त्रिकोण गमतीदार आहे. त्याचे तीनही कोन काटकोनाचे आहेत. म्हणजे त्या त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज २७०° भरते !




**चित्र क्र. २**

**नवीन भूमितीचे नियम :**

वरील उदाहरणावरून असं सिद्ध होतं की पृथ्वीच्या पृष्ठभागावर काढलेले त्रिकोण युक्लिडच्या भूमितीचे नियम पाळत नाहीत. आपण शाळेत शिकतो ती भूमिती युक्लिड ह्या ग्रीक गणितज्ञाने सुमारे दोन हजार वर्षापूर्वी शोधून काढली. त्या भूमितीत काही गोष्टी स्वयंसिद्ध म्हणून गृहीत धरल्या आहेत. त्या 'खऱ्या' समजून त्यावर प्रमेये आधारली असून ती सिद्ध करताना तर्कशास्त्राचा वापर केला जातो. ह्या युक्लिडच्या भूमितीतले प्रमेयच आपल्याला सांगते की प्रत्येक त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज १८०° भरते.




**चित्र क्र. ३**

मग चि. क्र. २ मधला त्रिकोण कुठल्या भूमितीत बसतो? पृथ्वीचा पृष्ठभाग सपाट नसल्याने तेथे युक्लिडच्या भूमितीचे नियम लागू पडत नाहीत. तिथल्या भूमितीला 'अयुक्लिडीय' भूमिती म्हणूया.

गेल्या शतकापर्यंत गणितज्ञांचा असा समज होता की युक्लिडने काढलेली भूमिती एकमेव भूमिती असू शकेल. परंतु हा समज शेवटी खोटा ठरला. युक्लिडच्या स्वयंसिद्ध गृहितकांपैकी काहीत बदल करून नवीन भूमित्या तयार करता येतात, याची जाणीव गेल्या शतकातल्या गणिततज्ज्ञांना प्रथमच झाली.

**एक बदललेले गृहीतक :**

चित्र क्र. ३ मध्ये **अ ब** ही सरळ रेषा असून **क** हा एक त्याबाहेरील बिंदू आहे. **क** मधून **अ ब** च्या समांतर किती रेषा काढता येतील?

युक्लिडने गृहीत धरलं की चि. क्र. ३ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे एक आणि एकच रेषा **अ ब** च्या समांतर काढता येईल

युक्लिडनंतरच्या अनेक गणिततज्ज्ञांनी हे गृहीत न धरता इतर युक्लिडच्या गृहीतकांच्या आधारे हा नियम प्रमेय म्हणून सिद्ध करण्याचा पुष्कळ प्रयत्न केला. पण त्यांना यश आलं नाही.

शेवटी काही शास्त्रज्ञांनी (लोबॅच्युस्की, गाउस, रीमान इ.) वेगळेच पर्याय गृहीत धरून पाहिले : (१) **क** मधून **अब** च्या समांतर एकही रेषा काढता येणार नाही; (२) **क** मधून **अब**च्या समांतर दोन किंवा अधिक रेषा काढता येतील.

आणि त्यांना जाणीव झाली की दोन्ही पर्याय नवीन अचूक भूमित्या निर्माण करतात. पहिला पर्याय पृथ्वीतलावरच्या अयुक्लिडीय भूमितीला लागू पडतो. अशा तऱ्हेने ........

अयुक्लीडीय भूमित्यांमधून गणिताच्या एका नवीन शाखेचा उगम झाला !

**हे कोडे सोडवा ! :**

वर दिलेल्या नंबर दोनच्या कोड्याचं उत्तर फक्त 'उत्तर ध्रुव' हे नव्हे. पृथ्वीवर आणखी ठिकाणे पण आहेत, जिथे त्या गृहस्थाचं घर असू शकेल. जरा डोकं खाजवल्यावर ही ठिकाणे सापडतील.

ह्या कोड्याचं उत्तर लेखांक १० मध्ये दिलं आहे.

□ □ □

# ९. न्हाव्याने स्वतःची दाढी करावी का ?

लेखांक सहामध्ये दिलेल्या तीन कोड्यांची उत्तरे खालीलप्रमाणे आहेत.

**खोटं कोण बोलला ? :**

(१) खरं आणि खोटं बोलणारे भाऊ - प्रवाशाने त्या दोघा भावांना एकच प्रश्न विचारला, तो असा :

"मी पुण्याहून आलोय आणि मला मुंबईला जायचेय; मी कुठला रस्ता घेऊ?"

खरं बोलणारा भाऊ मुंबईच्या रस्त्याकडे बोट दाखवेल, प्रवासी त्याच मार्गाने आलेला असल्याने त्याला खरं बोलणाऱ्याची ओळख पटेल.

आणि खोटं बोलणारा काय म्हणेल? तो मुंबईचा रस्ता नक्कीच दाखवणार नाही ! त्याच्यापुढे पर्याय आहेत पुणे आणि गोवा ह्या दोन रस्त्यांचे. पण तो असा विचार करेल : 'मी जर पुण्याच्या रस्त्याकडे बोट दाखवलं तर नक्कीच माझा खोटेपणा सिद्ध होईल. कारण हा प्रवासी पुण्याहून आलेला आहे. म्हणून तो मुंबईचा म्हणून गोव्याचा रस्ता दाखवतो.

म्हणून मुंबईचा रस्ता दाखवणारा खरं बोलणारा आणि दुसरा खोटं बोलणारा आणि त्याने दाखवलेला रस्ता गोव्याचा हे प्रवाशाने ओळखलं.

अर्थात उरलेला रस्ता पुण्याचा ही माहिती पण त्याला आपोआप मिळाली !

**राजाने प्रधान कोणाला नेमले ? :**

(२) प्रधानाची नेमणूक - आपण त्या तीन पंडितांना नावे देऊ A, B आणि C. आणि A हा सर्वात हुशार असं समजू. त्याने केलेला युक्तिवाद असा :

समजा माझ्या कपाळावर पांढरे गंध आहे. B ला माझे पांढरे गंध आणि C चे लाल गंध दिसते. तशा परिस्थितीत B ने राजाशी काय युक्तिवाद केला असता? तो म्हणाला असता 'C ने हात वर केला तो काय म्हणून? त्याला लाल गंध दिसलं म्हणून. पण A च्या कपाळावर तर पांढरे गंध आहे. त्या अर्थी C ला जे लाल गंध दिसलं ते माझ्याच कपाळावरचे असणार.' आणि B ने लगेच सागितलं असतं की माझं गंध लाल आहे. C ने पण हाच युक्तिवाद करून स्वतःबद्दल हाच निष्कर्ष काढला असता....... पण ज्या अर्थी B आणि C दोघेही गप्प आहेत त्या अर्थी माझ्या कपाळावरचं गंध पांढरं नसून लाल असलं पाहिजे !

अर्थात हाच युक्तिवाद B आणि C पण करू शकले असते पण ते A इतके हुशार नव्हते.

**हुशार पालक :**

(३) व्रात्य विद्यार्थ्यांचे हुशार पालक - प्रथम आपण अशी कल्पना करू की त्या शाळेत दहाऐवजी फक्त एकच व्रात्य विद्यार्थी होता. त्याच्या पालकाने असा युक्तिवाद केला असता :

'माझ्या माहितीप्रमाणे शाळेत व्रात्य विद्यार्थी नाहीत. पण मला माझ्या मुलाबद्दल नक्की माहीत नव्हतं. ज्या अर्थी हेडमास्तर म्हणतात की शाळेत व्रात्य विद्यार्थी आहेत त्या अर्थी माझाच मुलगा व्रात्य असणार.'

आणि पहिल्याच दिवशी त्या व्रात्य विद्यार्थ्याला शिक्षा झाली असती.

आता कल्पना करा, की शाळेत दोन व्रात्य विद्यार्थी होते. आपण त्यांच्या पालकांना A आणि B म्हणू, A ने असा तर्क केला असता.

'माझ्या माहितीप्रमाणे B चा मुलगा व्रात्य आहे. माझा मुलगा व्रात्य आहे की नाही हे मला ठाऊक नाही. जर तो व्रात्य नसेल तर सबंध शाळेत एकच व्रात्य मुलगा असून त्याला B पहिल्या दिवशीच शिक्षा करेल. आपण वाट पाहू. जर B ने पहिल्या दिवशी त्याच्या मुलाला शिक्षा केली नाही तर माझा मुलगा व्रात्य नाही हा माझा समज चुकीचा ठरेल: आणि मग मी त्याला दुसऱ्या दिवशी शिक्षा करीन.'

बरोबर हेच विधान B ने स्वतःच्या मुलाबद्दल केलं. त्यामुळे पहिल्या दिवशी हे दोघे वाट पाहात बसले. पहिल्या दिवशी कोणालाच शिक्षा झाली नाही. आणि त्यामुळे आपली मुले व्रात्य आहेत ह्याची दोघांना खात्री पटली. आणि त्यामुळे दुसऱ्या दिवशी दोघा व्रात्य मुलांना चोप मिळाला.

हाच युक्तिवाद जर शाळेत तीन व्रात्य विद्यार्थी असले तरी लागू होतो. जर त्यांचे पालक A, B आणि C असले, तर प्रत्येकजण असा युक्तिवाद करेल.

'माझ्या माहितीप्रमाणे दोन व्रात्य मुले आहेत. कदाचित माझा पोरगा पण व्रात्य असेल. जर तो व्रात्य नसेल तर दुसऱ्या दिवशी दोघाही व्रात्य मुलांना त्यांचे पालक शिक्षा करतील. तोपर्यंत आपण वाट पाहू. जर तसं झालं नाही तर माझा मुलगा पण व्रात्य ठरणार आणि मी त्याला तिसऱ्या दिवशी शिक्षा करीन.'

A, B आणि C ह्या तिघांनी हा युक्तिवाद करून दोन दिवस वाट पाहिली आणि तिसऱ्या दिवशी आपल्या पाल्यांचा समाचार घेतला.

आता त्या व्रात्य मुलांच्या पालकांनी कसा युक्तिवाद केला असेल आणि ते दहाव्या दिवसापर्यंत का थांबले याची कल्पना येईल !

**न्हाव्याचा डायलेमा :**



**न्हाव्याने स्वतःची दाढी करावी की करू नये ?**

काही कूट प्रश्न असे असतात, की कुठलाही पर्याय गृहीत धरून उत्तर मिळत नाही. अशा प्रश्नांना तर्कशास्त्रात आणि गणितात पॅरॅडॉक्स (Paradox) म्हणतात. अशा कूटप्रश्नांनी बरेच वेळा त्या विषयातील नवीन खुब्या दिसून येतात. बर्ट्रंड रसेलने सटांच्या उपपत्तीबद्दल (Set Theory) असाच एक कूट प्रश्न उपस्थित केला होता. ह्या रसेलच्या कूटप्रश्नामुळे सटांच्या द्वारे अंकगणिताचा पाया मांडण्याच्या कामी मदत झाली.

रसेलच्या कूटप्रश्नाचं एक व्यावहारिक रूप खालील प्रकारचं आहे : एका खेड्यात रामा हा एकमेव न्हावी होता. लोकांची दाढी करायचं काम त्याच्याकडे होतं. रामाने असं ठरवलं : मी ह्या खेड्यातील सर्व पुरुषांची आणि अशा पुरुषांची दाढी करणार, की जे स्वतःची दाढी स्वतःच करत नाहीत.' मग रामाने स्वतःची दाढी करावी की नाही?

हा एक कूट प्रश्न आहे ! दोन्ही पर्याय रामाच्या नियमात बसत नाहीत. तपासून पाहा.

**गुन्हा केलाच पाहिजे :**

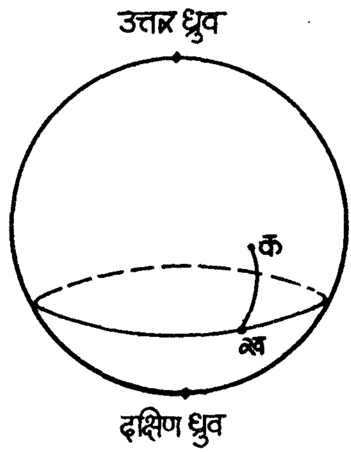
गिल्बर्ट आणि सलिव्हन यांच्या 'रडिगोर' नावाच्या विनोदी ऑपेऱ्यात एका सज्जन पण गुन्हेगार सरदाराची गोष्ट आहे. हा सरदार स्वभावाने सज्जन असूनही रोज एक गुन्हा करतो ! कारण त्याच्या घराण्याला शाप असतो. त्या घराण्यातल्या कर्त्या पुरुषाने रोज एक गुन्हा केला पाहिजे. नाही केला तर त्याला त्या रात्री अत्यंत कष्टमय मरण प्राप्त होईल. ते मरण नको म्हणून मनात नसतानाही त्या सरदाराला रोज गुन्हा करावा लागे.

पण एका हुशार माणसाने त्याची ह्या पेचप्रसंगातून मुक्तता केली. त्याने सांगितलेला उपाय असा : "जर तू एकही गुन्हा केला नाहीस तर तुला मरण येणार हे नक्की. त्या अर्थी गुन्हा न करणं म्हणजे स्वतःचं मरण ओढवून घेण्यासारखं आहे - म्हणजे हा आत्महत्येचा प्रयत्न झाला. पण हा प्रयत्न म्हणजेसुद्धा गुन्हा समजला जातो ! तेव्हा तू प्रत्यक्ष काहीही गुन्हा केला नाहीस तरी तुला मरण येणार नाही. कारण स्वस्थ बसूनसुद्धा तू आत्महत्येच्या प्रयत्नाचा गुन्हा करीत आहेस."

□ □ □

# १०. सूर्याभोवती त्रिकोण

लेखांक आठमध्ये विचारलेल्या कोड्याचं उत्तर खालीलप्रमाणे आहे : (पहा चित्र क्र. १)

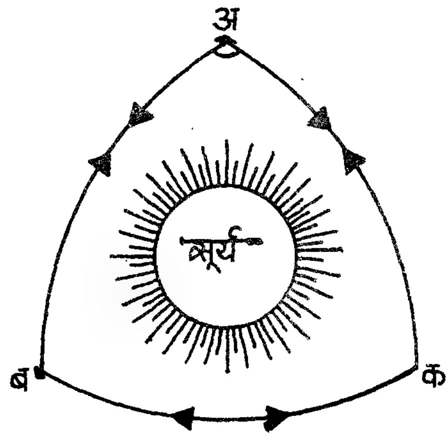



**चित्र क्र. १**

कल्पना करा, दक्षिण ध्रुवाच्या किंचित उत्तरेस एक मैल परिघाचे अक्षांशाचे वर्तुळ आहे. त्यावर कुठेही 'ख' हा बिंदू आहे आणि त्याच्या बरोबर उत्तरेला 'क' हा बिंदू एक मैलावर आहे. तर 'क' पासून एक मैल दक्षिणेस गेल्यावर 'ख' वर आपण पोचतो. 'ख' पासून एक मैल

पश्चिमेकडे गेल्यास सबंध वर्तुळ पूर्ण करून 'ख' कडेच परत येतो. आणि तेथून एक मैल उत्तरेस गेल्यावर 'क' ला पोचतो. तेव्हा 'क' हे ह्या प्रश्नाचं एक उत्तर आहे. शिवाय, एका ऐवजी १।२ मैलाच्या परिघाचे अक्षांशाचे वर्तुळ काढून त्यावर कुठेही 'ख' घेतल्यास त्याच्या उत्तरेस एक मैलावर 'क' असू शकेल. त्याचप्रमाणे १।३, १।४, १।५ मैल इत्यादि परिघांची अक्षांश वर्तुळे पण चालतील.

**सूर्याभोवती त्रिकोण :**




**चित्र क्र. २**

समजा सूर्याभोवती **अबक** हा तीन सरळ रेषांचा त्रिकोण काढला. त्याच्या तीन कोनांची बेरीज १८०° भरेल का? प्रश्नाचं उत्तर वाटतं तितकं सोपं नाही !

प्रत्यक्षात अशा सरळ रेषा काढू म्हटलं तर साधन कुठलं? निश्चितपणे सरळ रेषेत जाणारी एक गोष्ट शास्त्रज्ञाला उपलब्ध आहे - ती म्हणजे प्रकाश. **अ, ब** आणि **क** ह्या तीन स्थानकांवरून प्रकाशकिरणे एकमेकांकडे सोडायची (पाहा चित्र क्र. २) आणि त्यांच्या मधल्या कोनाचं मोजमाप करून ह्या प्रश्नाचा छडा लावता येईल.

परंतु एक अडचण येते. सूर्याचं गुरुत्वाकर्षण प्रकाशाला पण आकृष्ट करतं! त्यामुळे चि. क्र. २ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे ह्या प्रकाशरेषा किंचित् वाकतात आणि ह्या तीनही कोनांची बेरीज १८०° हून जास्त भरेल !

तुम्ही म्हणाल, ह्यात विशेष काय आहे? वाकल्यामुळे **अब, बक** आणि **कअ** ह्या सरळ रेषा राहिल्याच नाहीत आणि म्हणून त्यांना युक्लिडचा भूमितीचा नियम लागू पडत नाही.

त्याला उत्तर म्हणून शास्त्रज्ञ असं म्हणेल, की जर प्रकाशसुद्धा वाकतो तर आम्ही सरळरेषा काढून पाहायच्या कशा? कारण जोपर्यंत विश्वात वस्तू आहेत आणि त्यांना गुरुत्वाकर्षण असतं तोपर्यंत वरील उदाहरणाप्रमाणे त्यांच्याभोवती सरळ मार्गी जाणारा प्रकाशदेखील वक्रमार्गाने जाताना दिसेल!

**आइन्स्टाइनचा सिद्धान्त :**

ह्या पेचप्रसंगातून आइन्स्टाइनने एक विलक्षण उत्तर शोधून काढलं. त्याच्या मते चि. क्र. २ मधला त्रिकोण हा सरळ रेषांचाच आहे - फक्त त्या रेषा सरळ आहेत याचं कारण, आसमंतात युक्लिडच्या भूमितीचे नियम लागू होत नाहीत ! गेल्या शतकात अयुक्लिडीय भूमित्यांचा साक्षात्कार गणितज्ञांना झालेला होता. (ह्या विषयाची चर्चा लेखांक ७ मध्ये केली आहे) परंतु अशा अयुक्लिडीय भूमित्या प्रत्यक्ष आपल्या विश्वाला लागू पडतील असं धाडसी विधान आइन्स्टाइननेच केलं. आणि त्यातून रिलेटिव्हिटीच्या व्यापक सिद्धान्ताचा जन्म झाला !

काही वर्षापूर्वी शास्त्रज्ञांनी आधुनिक तंत्रज्ञानाच्या मदतीने मायक्रोवेव्ह आणि रेडियो लहरी पाठवून त्यांचं सूर्याच्या गुरुत्वाकर्षणामुळे कसं वक्रीकरण होतं याची मोजमापे केली आणि आइन्स्टाइनच्या सिद्धान्ताप्रमाणे अयुक्लिडीय भूमिती सूर्याच्या आसमंताला लागू पडेल असं विधान केलं.

**गणित आणि विज्ञान :**

वरील घटनेवरून गणित आणि विज्ञान यांच्यातील देवाणघेवाण दिसून येते. पुष्कळ वेळा प्रत्यक्ष जगात दिसलेल्या किंवा वैज्ञानिक प्रयोगातून उत्पन्न झालेल्या घटनेमुळे गणिताच्या एखाद्या नव्या शाखेला चालना मिळते. त्याउलट गणितज्ञाच्या अमूर्त सिद्धान्ताचं प्रात्यक्षिक अनेक वर्षांनी वैज्ञानिकाला पाहायला मिळतं. गेल्या शतकातल्या गणितज्ञांना - रीमान, गाउस इ. गणित धुरंधरांना - कल्पनाही नसेल की

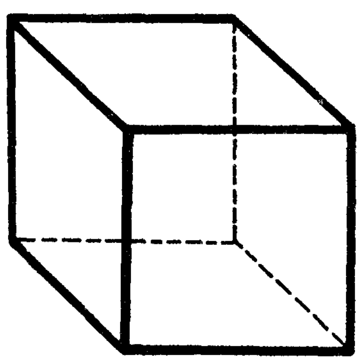
त्यांच्या युक्लिड - वेगळ्या भूमितीचं प्रात्यक्षिक केव्हातरी दिसून येईल

आज पण गणिताच्या अनेक अमूर्त सिद्धान्तांचे जनक छातीठोक-पणे सांगतात, की आमच्या सिद्धान्ताचा प्रत्यक्ष जगाशी काहीही संबंध नाही. सध्या तसा संबंध दिसून येत नाही हे खरं ! पण सृष्टीने अद्याप आपली अनेक रहस्ये मानवापुढे उलगडायची आहेत. आणि आजच्या गणिताचा उद्याच्या विज्ञानाला उपयोग झाला नाही तरच नवल !

□ □ □

# ११. लांबी, क्षेत्रफळ आणि घनफळ

**चित्र क्रमांक १** मध्ये एक घनाकृती ठोकळा दाखवला आहे. समजा, त्याची प्रत्येक बाजू एक सेंटिमीटर आहे, तर त्याचं पृष्ठभागाचं क्षेत्रफळ किती? त्याचप्रमाणे त्याचं घनफळ किती असेल?



**चित्र क्रमांक १**

गणित सोपं आहे. ह्या आकृतीच्या पृष्ठभागात एकूण सहा चौरस आहेत. प्रत्येकाचं क्षेत्रफळ एक वर्ग सेंटिमीटर आहे. म्हणजे एकंदर पृष्ठभागाचं क्षेत्रफळ = ६ वर्ग सेंटीमीटर. त्याचप्रमाणे ठोकळ्याचं घनफळ = १ × १ × १ = १ घन सेंटिमीटर.

आता समजा, त्या ठोकळ्याची प्रत्येक बाजू लांब करून

पहिल्यापेक्षा दसपट केली, तर त्याच्या पृष्ठभागाचं क्षेत्रफळ ६ × १० × १० = ६०० वर्ग सेंटिमीटर आणि त्याचं घनफळ १० × १० × १० = १००० घन सेंटिमीटर (किंवा एक लिटर) इतकं भरेल.

म्हणजे क्षेत्रफळ शंभरपटींनी आणि घनफळ हजारपटींनी वाढलं ! जितक्या प्रमाणात प्रत्येक बाजू वाढली त्याहून जास्त प्रमाणात क्षेत्रफळ आणि त्याहूनही जास्त प्रमाणात घनफळ वाढतं.

ह्या सोप्या नियमाची प्रात्यक्षिके व्यवहारात अनेक ठिकाणी आढळतात.

**हत्तीएवढा ससा !**

एखाद्या लहान मुलाने विचारण्याजोगा प्रश्न आहे "हत्तीएवढा मोठा ससा का नसतो?" त्याचं उत्तर वरील सिद्धान्ताच्या मदतीने देता येईल.

एखाद्या माणसाचा आकार सर्व बाजूंनी दसपट वाढवला. म्हणजे साडेपाच फुटी माणसाचा पंचावन्न फूट उंच राक्षस तयार होईल! कारण त्याचं घनफळ १००० पटींनी वाढलं आणि शारीरिक बदल झाले नाहीत असं गृहीत धरलं तर त्याचं वजन १००० पटींनी वाढेल. म्हणजे मुळात पन्नास किलो वजन असेल तर त्याचं वजन पन्नास हजार किलो म्हणजे पन्नास टन होईल. हे वजन त्याला पेलेल काय? वजन पेलायचं काम शरीरातली हाडं करतात. हाडांचं क्षेत्रफळ जितकं जास्त तितकी ती जास्त सुगमतेने वजन पेलू शकतात. आता ह्या राक्षसाच्या हाडांचं क्षेत्रफळ १०० पट जास्त आहे. - पण त्यांना वजन पेलायचंय ते पूर्वीच्या १००० पटीने आहे. त्यामुळे हाडांना पूर्वीच्या तुलनेने दसपट बोजा सहन करावा लागणार. मांडीच्या हाडांना तरी इतका बोजा पेलवणार नाही.

म्हणून ह्या राक्षसाने पावलं उचलली की त्याची हाडं कडाकडा मोडणार !

सृष्टीत प्रत्येक प्राण्याच्या आकाराचा त्याच्या शारीरिक रचनेशी घनिष्ठ संबंध असतो. अमुक तऱ्हेचा प्राणी अमुक एक आकारमानाच्या पल्ल्यातच जगू शकतो असं वरील गणित सांगतं. त्यामुळे हत्ती एवढा ससा परिकथेत असेल पण ह्या पृथ्वीवर तरी त्याला स्थान नाही !

**'योग्य आकार असणे' :**

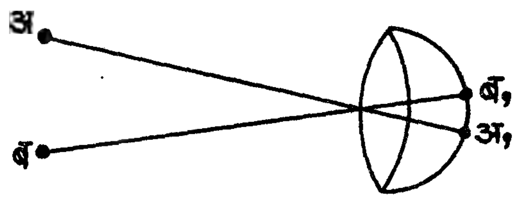
वरील शीर्षकाचा एक लघुनिबंध प्रख्यात प्राणिशास्त्रज्ञ प्रोफेसर जे. बी. एस. हॉल्डेन यांनी अनेक वर्षांपूर्वी लिहिला असून त्यात वरील उदाहरण दिलं आहे. त्या लेखातले आणखी काही विचार पुढे देत आहे.

मोठं असणं नेहमीच हानिकारक असतं असं नाही. याचं एक उदाहरण हॉल्डेन यांनी दैनंदिन जीवनातलं दिलं आहे, ते असं. आपण आंघोळ केली की अंग पुसण्यापूर्वी आपल्या शरीरावर पाण्याचा बारका थर असतो. त्या पाण्याचं वजन साधारण ४०० ग्रॅम इतकं असतं. माणसाच्या स्वतःच्या वजनाच्या ते एक टक्क्याहूनही कमीच असल्याने त्याला ते जाणवत नाही. पण उंदराला आंघोळ घातली तर? त्याचा पृष्ठभाग मनुष्याच्या पृष्ठभागापेक्षा पुष्कळ कमी असल्याने त्याच्यावर साठलेलं पाणी त्याच प्रमाणात ४०० ग्रॅमपेक्षा कमी असणार. परंतु त्याचं घनफळ माणसाच्या घनफळापेक्षा पुष्कळच कमी असणार. त्यामुळे त्याच्या अंगावर साठलेलं पाणी जवळजवळ त्याच्या स्वतःच्या वजनाइतकं भरतं! स्वतःच्या वजनाइतकं पाणी अंगावर वाहून नेणं किती त्रासाचं आहे हे प्रत्यक्ष अनुभवाने पाहावं ! उंदरापेक्षा लहान आकाराचा प्राणी पाण्यात बुचकळल्यावर आणखीनच बिकट परिस्थितीत सापडेल. उदाहरणार्थ ओली माशी !

साधारण ५००० उंदरांचं वजन मनुष्याच्या वजनाइतकं भरेल. ते सर्व उंदीर दिवसभरात किती अन्न खातात आणि श्वासासाठी किती ऑक्सिजन घेतात हे पाहिलं तर ते सामान्य माणसाच्या १७ पटींनी असतं. याचं कारण काय? माणूस शरीराच्या पृष्ठभागातून उष्णता बाहेर सोडतो. आपलं तपमान स्थिर राहण्यासाठी अन्न प्राशन करून त्यातून तो शरीराबाहेर गेलेली उष्णता भरून काढतो. त्यामुळे तो किती खातो हे त्याच्या पृष्ठभाग आणि एकंदर वजन याच्या गुणोत्तरा (Ratio) वर अवलंबून आहे. उंदराच्या बाबतीत हे प्रमाण माणसाच्या १७ पट असतं. (वर दिलेल्या नियमाप्रमाणे १७ × १७ × १७ हे जवळजवळ ५००० आहे हे सूज्ञ वाचकांच्या लक्षात आलं असेलच.) अंग गरम ठेवणं हे मोठ्या प्राण्यांपेक्षा छोट्या प्राण्यांना अवघड जातं. म्हणून थंड भागात मोठे प्राणी अधिक आढळतात !

**डोळस प्राणी :**

डोळ्याच्या आकाराला पण डोळसपणाच्या दृष्टीने महत्त्व आहे. डोळ्याच्या मागच्या भागातल्या पडद्यावर बाहेरील विश्वाचं प्रतिबिंब पडतं आणि त्या प्रतिबिंबाच्या आधारे मेंदू 'पाहण्या'चं काम करतो. कुठलीही वस्तू स्पष्ट दिसायला तिच्या वेगवेगळ्या भागांचं प्रतिबिंब वेगळं पडलं पाहिजे. (पहा चित्र क्रमांक २).




**चित्र क्र. २**

**अ** आणि **ब** ची प्रतिबिंबे **अ**$_1$ आणि **ब**$_1$ येथे पडली आहेत. पण **अ**$_1$ व **ब**$_1$ हे किती जवळ असू शकतील? त्याला मर्यादा आहे आणि ती घातली आहे प्रकाशाच्या 'वेव्ह लेंग्थ'ने. (वेव्हलेंग्थ म्हणजे प्रकाशलहरीची लांबी). त्यामुळे **अ** आणि **ब** हे फार जवळ असले (म्हणजे वरील मर्यादेचं उल्लंघन झालं) तर **अ** आणि **ब** हे वेगळे दिसत नाहीत.

ह्यामुळे मोठ्या आकाराच्या डोळ्याला जास्त स्पष्ट दिसू शकतं आणि त्यामुळे लहान प्राण्यांचे डोळे त्यांच्या शरीराच्या तुलनेने शक्य तितके मोठे ठेवायचा निसर्गाचा प्रयत्न असतो. तरी त्यांचे डोळे माणसाइतके कार्यक्षम नसतात. (उंदराला सहा फुटांवरून दोन माणसांच्या चेहऱ्यातला फरक ओळखता येणार नाही !)

त्याउलट मोठ्या प्राण्यांचे डोळे त्यांच्या शरीराच्या मानाने मोठे असत नाहीत. कारण इतक्या मोठ्या डोळ्यांची त्यांच्या जीवनाला आवश्यकता नसते. हत्तीचे डोळे माणसाच्या डोळ्यांच्या मानाने फार मोठे नसतात. प्राणिशास्त्रातही गणिताला वाव असतो हे हॉल्डेनसाहेबांच्या विधानांनी दाखवून दिलं आहे.

□ □ □

# १२. जादूचे वर्ग

चित्र क्र. १ मध्ये १ पासून ९ पर्यंतचे अंक एका वर्गाकृतीत काढले आहेत.

| | | |
|---|---|---|
| ८ | १ | ६ |
| ३ | ५ | ७ |
| ४ | ९ | २ |

चित्र क्र. १

ह्या आकडेवारीचं वैशिष्ट्य असं की कुठल्याही ओळीतल्या किंवा कुठल्याही रकान्यातील तीन आकड्यांची बेरीज सारखी भरते :

८ + १ + ६ = १५,

८ + ३ + ४ = १५,

३ + ५ + ७ = १५,

१ + ५ + ९ = १५,

४ + ९ + २ = १५,

६ + ७ + २ = १५.

फार काय, दोन्हीपैकी प्रत्येक कर्णरेषेतील आकड्यांची बेरीजही तितकीच भरते :

८ + ५ + २ = १५,

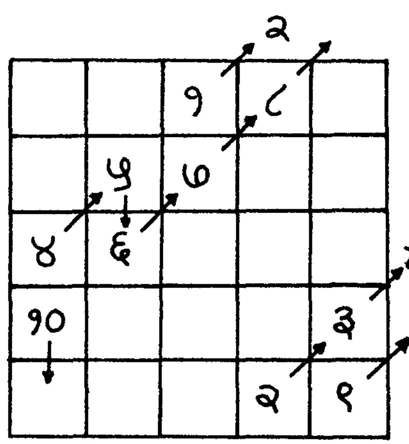
४ + ५ + ६ = १५,

अशी वर्गाकृती 'जादूचा वर्ग' म्हणून ओळखली जाते.

**विषम क्रमाचे जादूचे वर्ग**

वरील उदाहरण 'तीन बाय तीन' ह्या वर्गाकृतीचं होतं. तीन ही 'विषम संख्या' (म्हणजे २ ने भाग न जाणारी) आहे. अशा विषम संख्यांचे जादूचे वर्ग तयार करणं सोपं आहे. द.ला लबेअर नावाच्या गणितज्ञाने विषम क्रमाचे वर्ग तयार करण्याची पद्धत शोधून काढली. ती वापरून आपण ५ × ५ चा म्हणजे १ ते २५ पर्यंतच्या आकड्यांचा जादूचा वर्ग तयार करूया. पहा चित्र क्र. २

पहिला आकडा १ हा पहिल्या रांगेतल्या मध्यावर मांडायचा आणि तिथून ५ पर्यंतचे आकडे तिरके ( → च्या दिशेने) कर्णाकडे मांडत जायचं. १ नंतरचा पहिलाच आकडा - २ हा शेजारच्या रकान्याबाहेर पडतो म्हणून तो त्या रकान्याच्या खालच्या टोकाला आणायचा. हाच नियम ४ ला लावायचा. ४ हा आकडा तिसऱ्या रांगेच्या उजवीकडे बाहेर पडतो म्हणून तो त्या रांगेच्या डाव्या टोकाला मांडायचा.




चित्र क्र. २

अशा प्रकारे पहिले ५ आकडे लिहून झाले की त्या पुढचा आकडा ६ हा ५ खाली मांडायचा आणि चि. क्र. २ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे परत तिरकं जायला सुरुवात करायची. ह्या नियमाप्रमाणे ६-१० हे आकडे मांडून दाखवले आहेत. त्या पुढचे आकडे त्याच नियमाप्रमाणे मांडून पाहा हा पाच बाय पाचचा वर्ग जादूचा वर्ग होतो की नाही ते !

ह्याच नियमाप्रमाणे ७ × ७ , ९ × ९ .... हवे तितके मोठे जादूचे वर्ग करता येतील.

मात्र हा नियम विषमक्रमाच्या वर्गांनाच लागू पडतो. उदाहरणार्थ, ४ × ४ चा जादूचा वर्ग अशा तऱ्हेने बनवता येत नाही. 'सम' क्रमाचे जादूचे वर्ग कसे बनवायचे हे पण गणितज्ञांनी शोधून काढलं आहे.परंतु याचे नियम किचकट असल्याने जागेच्या अभावी येथे देता येणार नाहीत.

४ × ४ चा एक जादूचा वर्ग चित्र क्र. ३ मध्ये दिला आहे.

| | | | |
|---|---|---|---|
| १ | १२ | ७ | १४ |
| ८ | १३ | २ | ११ |
| १० | ३ | १६ | ५ |
| १५ | ६ | ९ | ४ |

**चित्र क्र. ३**

चार बाय चार चे १-१६ ह्या आकड्यांचे ह्याशिवाय वेगळे जादूचे वर्ग करता येतात. प्रयत्न करून पाहा !

कुठल्याही क्रमाचे सर्व जादूचे वर्ग कसे बनवायचे हे दाखवणारा नियम अजून गणितज्ञांना गवसलेला नाही. वर दिलेली पद्धत जादूचा वर्ग बनवायच्या अनेक नियमांपैकी एक आहे, हे जाता जाता नमूद करणं आवश्यक आहे.

□ □ □

# १३. आकड्यांचे चमत्कार

(१)

एका मागासलेल्या देशात गणितीय शिक्षणाला कमी लेखलं जात असे. राजापासून अगदी सामान्य प्रजाजनापर्यंत सर्वच ह्या विषयाला घाबरून असत. एकदा राजदरबारात एक साधू आला. तो म्हणाला, "मी काही आकड्यांचे चमत्कार करून दाखवतो."

"अबब ! आकडे !" सर्व लोक हादरले. पण चमत्कार पाहायला त्यांनी दरबारात गर्दी केली.

"लोक हो ! तुम्ही गणिताला घाबरता म्हणून मी अगदी सोपे चमत्कार दाखवणार आहे." साधूने सुरुवात केली. समोरच्या एका सरदाराला उद्देशून तो म्हणाला, "कुठलीही तीन अंकी संख्या सांग, जिचा पहिला आणि तिसरा आकडा तोच नसेल." पुष्कळ डोकं खाजवून सरदारसाहेब म्हणाले :

३ ५ ८

"ती उलटी कर !" साधू म्हणाला. "सोपं आहे" सरदाराने लगेच उत्तर दिलं, ८ ५ ३.

" आता ह्या दोन संख्यांपैकी मोठीतून छोटी वजा कर." साधूने सांगितले.

बापरे ! वजाबाकी तर आपण कधी केलीच नाही. सरदारसाहेबांची असहाय्य मुद्रा पाहून इतरांनी त्यांना मदत केली :

  ८ ५ ३
− ३ ५ ८
  ४ ९ ५

"आता ही संख्या उलटी करून त्यात मिळवा." - साधू.

  ४ ९ ५
+ ५ ९ ४
१ ० ८ ९

"आहे की नाही गंमत?" साधूने विचारलं. लोकांना कळेना - गंमत कसली? साधूने खुलासा केला, "कुठलीही संख्या सरदारसाहेबांनी सांगितली असती तरी उत्तर नेमकं हेच येतं."

सूचना : तीन अंकी संख्या उलटी करून, मोठीतून छोटी संख्या वजा केल्यावर वजाबाकीत शून्य आल्यास ते वगळू नये.

उदाहरणार्थ :

२ ५ १ ह्या संख्येची उलट १ ५ २

∴ २ ५ १
− १ ५ २
  ० ९ ९  ह्याची उलट ९ ९ ० येते.

(येथील शतकस्थानचे ० वगळून नुसते ९ ९ लिहू नयेत.)

(२)

"कुठल्याही दोन संख्या सांगा - मात्र शून्य वगळून." साधू पुढे म्हणाला. एका चुणचुणीत शाळकरी पोराने सांगितलं. ५, ९

"ठीक. दुसऱ्या संख्येत एक मिळवून पहिलीने भागा." - साधू. पोराने गणित केलं.

९ + १ = १०    १० ÷ ५ = २

"आता आपल्याकडे तीन संख्या झाल्या - ५, ९, २" साधू

म्हणाला. "आता नव्या संख्येत १ मिळवून तिला त्यापूर्वीच्या संख्येने भागा म्हणजे चौथी संख्या मिळेल."

$$२ + १ = ३,\ ३ \div ९ = \frac{१}{३} \rightarrow ५, ९, २, \frac{१}{३}$$

"पुन्हा हेच कर" साधूने सांगितले. "असं किती वेळा करायचं?" पोराने विचारलं. कारण भागाकार करून तो दमायला लागला. "कर दोन वेळा आणि बघ गंमत" साधूने आश्वासन दिलं.

$$\frac{१}{३} + १ = \frac{४}{३},\ \frac{४}{३} \div २ = \frac{२}{३} \rightarrow$$

$$५, ९, २, \frac{१}{३},\ \frac{२}{३}$$

$$\frac{२}{३} + १ = \frac{५}{३},\ \frac{५}{३} \div \frac{१}{३} = ५ \rightarrow$$

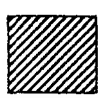
$$५, ९, २, \frac{१}{३},\ \frac{२}{३},\ ५$$

अरेच्या ! ह्या आकड्यांच्या मालिकेतली ६ वी संख्या पहिल्या संख्येइतकीच आली.

"कुठल्याही दोन संख्या घेतल्या तरी असंच होतं. करून पाहा." साधू म्हणाला.

(३)

साधूने ७ कार्डे बाहेर काढली. (ती सोबतच्या चित्रात पहा) त्यावर आकडे लिहिलेले असून काही ठिकाणी भोकं होती येथे दाखविल्याप्रमाणे.



कार्ड नं. १ प्रमुख कार्ड असून त्यावर १-२० आकडे होते. बाकीच्या सहा कार्डांवर बॉर्डरवरच काही आकडे होते. त्याने ती कार्डे राजाकडे दिली (प्रमुख कार्ड स्वतःजवळ ठेवलं) आणि म्हणाला,

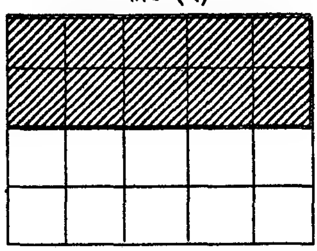
"मनात १ ते २० पर्यंतची कुठलीही संख्या घेऊन ती ज्या कार्डावर असेल, ती कार्डे मला द्या." राजाने तीन कार्डे त्याला दिली.

ती कार्डे एकावर एक ठेवून त्याने प्रमुख कार्डावर बनविली. तो काय चमत्कार ! राजाच्या मनातला नंबर तेवढा भोकातून दिसत होता.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| १ | २ | ३ | ४ | ५ |
| १० | ९ | ८ | ७ | ६ |
| ११ | १२ | १३ | १४ | १५ |
| २० | १९ | १८ | १७ | १६ |

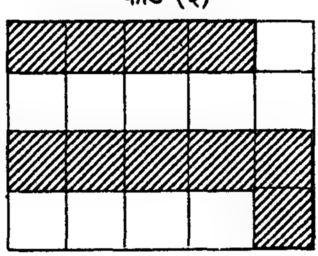
प्रमुख कार्ड (१)

कार्ड (२)



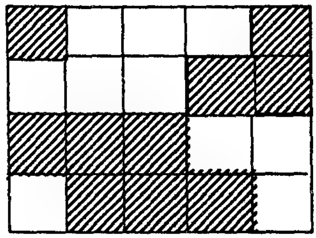
१ २ ३ ४ ५
६ ७ ८ ९ १०

कार्ड (३)



१ २ ३ ४ ११
१२ १३ १४ १५ १६

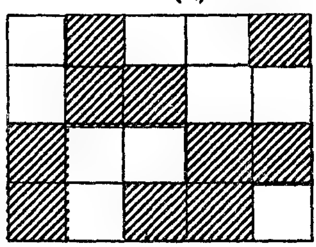
कार्ड (४)



१ ५ ६ ७ ११

१२ १३ १७ १८ १९

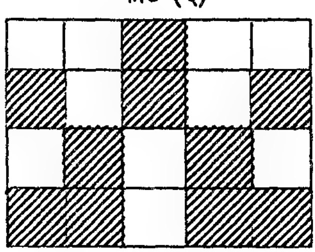
कार्ड (५)



२ ५ ८ ९ ११

१४ १५ १७ १८ २०

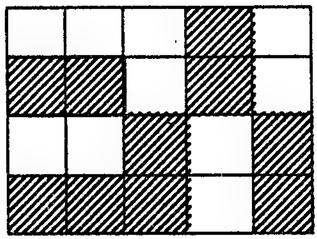
कार्ड (६)



३ ६ ८ १० १२

१४ १६ १७ १९ २०

कार्ड (७)



४ ७ ९ १० १३

१५ १६ १८ १९ २०

टीपा -

(१) पहिला 'चमत्कार' अनेक वेळा करून पाहिल्यावर त्याचं 'रहस्य' कळेल.

(२) दुसरा 'चमत्कार' कसा होतो ते शालेय बीजगणित (Algebra) नुकताच शिकायला लागलेला विद्यार्थी समजू शकेल.

(३) तिसऱ्या चमत्कारातली कार्डे बनवणं सोपं आहे. ७ सें.मी. × ७ सें. मी. आकाराची कार्डे घेऊन चि. क्र. १ प्रमाणे शेड असलेल्या ठिकाणी कापावीत. ६ वेगवेगळ्या वस्तूंपैकी ३ वस्तूंचे एकंदर २० वेगवेगळे गट पडू शकतात ह्या गणितीय नियमावर हा 'चमत्कार' आधारलेला आहे.

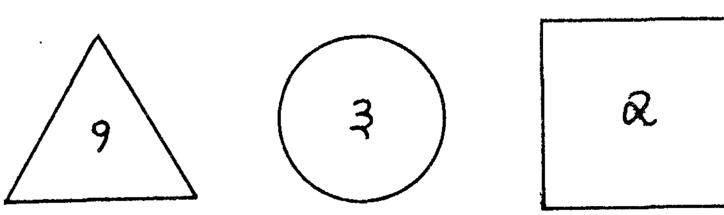
□ □ □

# १४. सर्वात हुशार कोण?

एका राजाकडे तीन पंडित आले. त्यांच्यात वाद होता की तिघांपैकी सर्वात हुशार कोण? राजाने त्यांची अनेक प्रकारे परीक्षा घेतली पण तरीही त्याला ते ठरवता आलं नाही. अखेर प्रधानाने त्या पंडितांना एक प्रश्न घातला.

प्रधानाने सर्वांना सारख्याच लांबीची दोरी दिली (- ६० मीटर असं आपण समजू). आणि त्यांना सांगितलं की, ह्या दोरीने परिवेष्टित असलेली जास्तीत जास्त क्षेत्रफळाची जागा शोधून काढा त्या जागेचा आकार कसाही असला तरी चालेल !

त्या तिघांनी खालील आकारांच्या जागा घेतल्या :




**चित्र क्रमांक १**

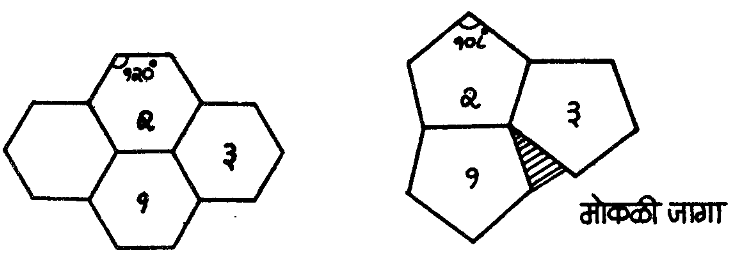
पहिल्या पंडिताने सारख्या लांबीच्या बाजूचा त्रिकोण घेतला तर दुसऱ्याने चौरसाचा आकार निवडला. मात्र वर्तुळाकार जागा निवडणाऱ्या

तिसऱ्या पंडितालाच प्रधानाने सर्वात हुषार व विजयी ठरविलं.

किंचित विचार केल्यास आणि थोडं गणित मांडल्यास ह्याचं कारण समजून येईल. त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ जवळ जवळ १७३ चौरस मीटर, चौरसाचं २२५ चौरस मीटर तर वर्तुळाचं क्षेत्रफळ जवळ जवळ २८६ चौरस मीटर इतकं भरतं.

**बहुभुज**

त्रिकोणाला तीन बाजू तर चौरसाला चार बाजू असतात. त्यापुढची पायरी म्हणजे पंचकोनी आकृती. ६० मीटर परीघ असलेली, सर्व बाजू सारख्या असलेली (म्हणजे प्रत्येक बाजू १२ मीटरची) आकृती काढल्यास तिचं क्षेत्रफळ चौरसापेक्षा अधिक असेल. हाच क्रम पुढे चालू राहतो. समान बाजूंचा बहुभुज, ठराविक परिघाचा, जितक्या जास्त बाजूंचा तितकं त्याचं क्षेत्रफळ जास्त. (अर्थात ही वाढ बाजूंच्या संख्येच्या प्रमाणात वाढत नाही!) वर्तुळ ही आकृती म्हणजे अनंत भुजांचा बहुभुज म्हणायला हरकत नाही - तिचं क्षेत्रफळ सर्वात जास्त असतं.

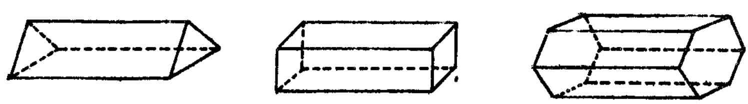



**चित्र क्रमांक २**

आता ठराविक परीघ याचा विचार न करता, आपण ह्या समान भुजांच्या बहुभुजांची वेगळ्या दृष्टिकोनातून पाहणी करू. समजा, आपल्याला जमिनीवर फरशा लावायच्या आहेत. त्यासाठी कुठल्या कुठल्या आकारांच्या फरशा चालतील? अर्थातच एकमेकांना चिकटून

लावता आल्या पाहिजेत. त्यामध्ये मोकळी जागा राहून उपयोगी नाही. चौरस फरशा हे काम बजावतात. त्रिकोणी फरशा पण चालतील.पंचकोनी फरशा चालतील का? उत्तर : 'नाही !' कारण चित्र क्रमांक २ मध्ये पहा.

शेजारी ३ पंचकोनी फरशा लावल्यास मध्ये मोकळी जागा राहाते. पण हाच प्रकार षटकोनी फरशांना लागू नाही. त्या बरोबर 'फिट्ट' बसतात. कुठल्याही बिंदूभोवती ३६०° चा कोन असतो. षटकोनाचा प्रत्येक आतला कोन १२०° चा असतो. त्यामुळे तीन षटकोन बरोबर बसतात. पंचकोनाचा प्रत्येक कोन १०८° चा असल्याने असे तीन पंचकोन शेजारी लावले की ३६° चा कोन मोकळा राहातो.



**चित्र क्रमांक ३**

**मधमाश्यांचे पोळे**

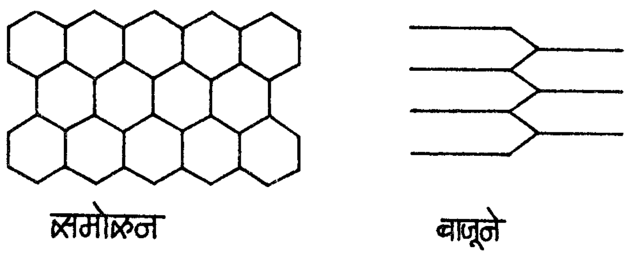
मधमाश्यांना पोळ्यात मध साठवताना दोन गोष्टींचीं दखल घ्यावी लागते असं समजूया. एक म्हणजे त्यातले कोश (Cell) एकमेकांशी 'फिट्ट' बसले पाहिजेत. दुसरी गोष्ट म्हणजे प्रत्येक कोशाचा पृष्ठभाग, जिथे मेण (Bee's wax) असतं, तो शक्य तितका कमी असावा किंवा कोश बांधताना त्याच्या भिंतीत शक्य तितकी जास्त जागा मधासाठी असावी. पहिल्या गोष्टीची दखल घेतल्यास मधमाशीपुढे तीन पर्याय उरतात : (पहा चित्र क्र. ३).

ह्या कोशांच्या लांब बाजू आडव्या (पृथ्वीतलाला समांतर) काढल्या आहेत. आता दुसऱ्या गोष्टीचा विचार केला तर ह्या तीन आकृत्यांपैकी तिसरी सर्वात जास्त मध ठेवू शकेल.

बहुधा ह्या 'गणिताचा' निसर्गाने विचार केला असावा. कारण हा

षट्कोनी आकार बहुतेक पोळ्यात सापडतो.

ह्या कोशांची टोके कशी असावीत म्हणजे लांबीच्या बाजूने पाहिल्यास ती एकमेकांत बसू शकतील? चि. क्र. ४ मध्ये समोरून आणि लांबीच्या बाजूने पोळ्याचं चित्र दिलं आहे.




**चित्र क्रमांक ४**

ही कोशांची टोके कशी असावीत? वर नमूद केलेल्या दोनही गोष्टींची दखल घेतल्यास उत्तर येतं Rhombic dodecahedron म्हणजे १२ पृष्ठभागांची आकृती, ज्याचा प्रत्येक पृष्ठभाग समचतुर्भुज (पत्त्यातली 'चौकट' ची आकृती) असतो. गंमत म्हणजे अशा तऱ्हेची टोकं बऱ्याच पोळ्यांच्या कोशात आढळतात.

गणितीय सिद्धान्ताचा निसर्गात कसा वापर होतो याचं हे एक उदाहरण !

**प्लेटोचं कोडं**

प्लेटो नावाच्या एका बेल्जियन गणितज्ञाने घातलेलं गणित खुद्द गणिती लोकांना अनेकदा सोडवणं अवघड जातं. पण निसर्गाच्या मदतीने ते पटकन सुटतं. प्लेटोचा प्रश्न असा : 'एखाद्या दोरीची किंवा तारेची दोनही टोकं जोडून लूप तयार करा. ह्या लूपने घेरलेला कमीतकमी क्षेत्रफळाचा पृष्ठभाग कोणता?'

ऑयलर नावाच्या गणितज्ञाने मांडलेल्या सिद्धान्ताच्या आधारे हा प्रश्न सोडवायला आवश्यक ती समीकरणे मांडता येतात. पण ती

सोडवणं पुष्कळ वेळा शक्य होत नाही ! कारण पुष्कळ वेळां लूप अतिशय वेडावाकडा असतो.

निसर्गाची मदत घेतली की हा प्रश्न सुटतो. साबणाचे फुगे करतो त्या प्रमाणे साबणाचे पाण्यात मिश्रण तयार करा. दिलेल्या आकाराचा तारेचा लूप त्यात बुडवा. बाहेर काढल्यावर त्या लूपला चिकटलेली साबणाची बारीक फिल्म तयार होते. पृष्ठताण (सर्फेस टेंशन) ह्या नैसर्गिक गुणामुळे ह्या फिल्मचा पृष्ठभाग शक्य तितका कमी करायची निसर्गाची प्रवृत्ती असते. म्हणून तयार झालेल्या फिल्मचा पृष्ठभाग हेच या प्रश्नाचं निसर्गानं दिलेले उत्तर !

तार हळूहळू वळवून त्याचा आकार बदलल्यास हा पृष्ठभाग बदलतो. कधीकधी त्यात गमतीचे बदल होतात. प्रत्यक्ष प्रयोग करून पहा.

□ □ □

# १५. सोडवणार हे प्रश्न?

खाली वेगवेगळ्या प्रकारची काही कोडी दिली आहेत. ती सोडवण्यासाठी गणिताचं फारसं ज्ञान आवश्यक नाही - पण गणिताला आवश्यक असलेली तर्कप्रणाली लागेल. शाळकरी मुलांना (आणि कदाचित त्यांच्या आई-वडिलांना !) ही सोडवायला अवघड जाऊ नयेत.

**प्रश्न १ : वय ओळखा**

घरोघर फिरून खेळणी विकणारा विक्रेता एका घरी गेला. घरातली मालकीण म्हणाली, "तुम्ही जर माझ्या तीन मुलांची वये ओळखलीत तर मी तुमच्याकडून खेळणी घेईन-"

"बरं बाईसाहेब, सांगा तुमचं कोडं !" विक्रेत्याने आव्हान स्वीकारलं.

"माझ्या तीनही मुलांच्या वयांचा गुणाकार ३६ होतो - अर्थात् वयेही पूर्णांकात मोजायची. त्यांच्या वयांची बेरीज शेजारच्या घराच्या नंबराइतकी होते."

विक्रेता शेजारच्या घराचा नंबर पाहून आला. जरा वेळ डोकं खाजवून म्हणाला, "बाईसाहेब, एवढी माहिती पुरेशी नाही. आणखी माहिती सांगा."

घरमालकीण म्हणाली, "माझी सर्वात मोठी मुलगी उत्तम पेटी वाजवते." त्यावर तो विक्रेता आनंदाने उद्गारला, "मग बाईसाहेब तुमच्या

मुलांची वये मी ओळखली."

तुम्हाला ओळखली का? आणि शेजारच्या घराचा नंबर किती?

**प्रश्न २ : जन्मतारीख ओळखा**

एका पार्टीला काही लोक जमले होते. एकमेकांना कोडी घालीत होते. अभिजित म्हणाला, "माझी जन्मतारीख ओळखा पाहू." सर्वांनी कान टवकारले.

"परवा मी १५ वर्षाचा होतो-" अभिजित बोलायला लागला त्याला थांबवून वसंत म्हणाला, "म्हणजे उत्तर सापडलंच की! परवा तुझा वाढदिवस होता ना?"

"जरा बोलू देशील तर !" अभिजित म्हणाला, "अरे, परवापर्यंत माझे वय १५ पूर्ण होते एवढेच. आणि पुढचं वर्ष संपेपर्यंत मला एकोणिसावं लागेल."

"अशक्य !" बरेच लोक उद्गारले.

"कुठेतरी लीप इयर येत असणार," दुसरे काही म्हणाले.

"जरा विचार करा ! हे शक्य आहे आणि याचा लीप इयरशी काहीही संबंध नाही." अभिजित शांतपणे म्हणाला.

अभिजितचा वाढदिवस केव्हा होता?

**प्रश्न ३ : बापसे बेटी सवाई**

भास्करबुवा घरी आले ते उदास मनःस्थितीतच.

"बाबा काय झालं? आज तुम्ही माझ्याशी खेळत का नाही?" त्यांच्या मुलीने विचारलं.

"अग लिले, काय सांगू तुला ! इतके दिवस माझ्या क्लबात मी बुद्धिबळ चॅम्पियन होतो. यंदा दोन नवीन मेंबर्स आलेत. आज त्या दोघांनी मला हरवलं !"

"कमाल आहे ! उद्या मी दोघांशी खेळते. एकाला तरी हरवीनच मी. नाहीतर दोघांशी बरोबरी करीन. पण मी दोघांशी एकदम खेळणार." लीला म्हणाली.

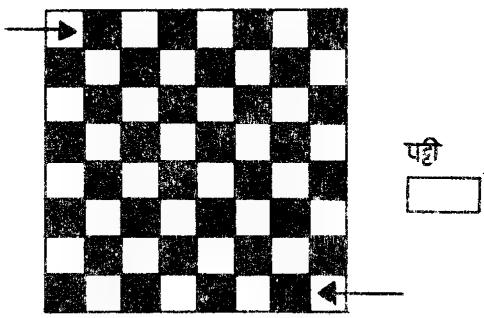
"तू? अग तुला नुकतंच कुठे खेळता येतं. शिवाय दोघांशी एकदम

दोन पटांवर खेळणं सोपं नाही" अविश्वासाने भास्करबुवा उद्गारले.

पण लीलावतीने ते बोलणं खरं करून दाखवलं. कसं?

**प्रश्न ४ : हे जमेल का?**

इथे एक बुद्धिबळाचा पट दाखवला आहे. त्यातले बाणाने निर्दिष्ट केलेले कॉर्नरचे पांढरे दोन चौकोन कापून टाकले असं समजा.



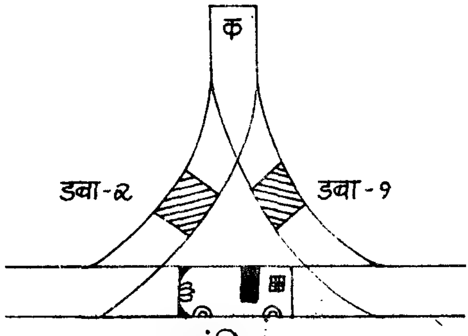

**चित्र क्र. १**

उरलेल्या आकृतीत ६२ चौकोन आहेत. ते शेजारच्या पट्टीने झाकून टाकायचे आहेत. पट्टीने शेजारचे दोन चौकोन झाकता येतात. मात्र तोच चौकोन दोन किंवा अधिक वेळा झाकता कामा नये, आणि पट्टी अवशिष्ट पटाच्या बाहेर पडता कामा नये.

हे शक्य आहे का? प्रयत्न करून पाहा !

**प्रश्न ५ : शंटिंग करा.**

एका स्टेशनजवळ इंजिन आणि दोन डबे तीन लोहमार्गावर चित्र क्र. २ प्रमाणे आहेत. 'क' हा रुळाचा भाग एक डबा मावेल इतका लांब आहे, पण इंजिन मावेल इतका नाही.




चित्र क्र. २

शंटिंग करून डब्यांची अदलाबदल करून दाखवा. सध्या इंजिन उभं आहे तो ट्रॅक भरपूर लांब आहे असं समजावं. त्याचप्रमाणे डबे इंजिनाच्या मागे पुढे जोडता येतात हे गृहीत धरावे.

**प्रश्न ६ : असं का व्हावं?**

दोन शहरे 'अ' आणि 'ब' च्या दरम्यान तासाच्या अंतराने बसेस जातात. ह्या शहरांच्या मध्यावर 'क' ह्या ठिकाणी दोन्ही बाजूंच्या बसची स्थानके समोरासमोर आहेत. तिथे राहणारा एक रिकामटेकडा माणूस वेळ घालवायला वाटेल त्यावेळी 'क' जवळ उभा राही आणि मिळेल ती पहिली बस पकडे. त्याची स्थानकावर येण्याची वेळ पूर्णपणे अनिश्चित असे. पण त्याला असं आढळून आलं की, १०० पैकी साधारण ९० वेळा तो 'अ' कडे जाई आणि फक्त १० वेळा 'ब' कडे.

दोन्ही बाजूंच्या बसेस तितक्याच फ्रिक्वेंसीने जात असताना असा पक्षपातीपणा का व्हावा?

**प्रश्न ७ : वाढदिवस**

एका वर्गात ३० मुले आहेत. समजा तुम्ही पैज लावली की, कमीत कमी एक तरी मुलांची जोडी असेल की ज्यांचे वाढदिवस एकाच दिवशी असतील. ही पैज तुम्ही जिंकण्याची शक्यता कितपत असेल?

ही शक्यता (१) १० टक्क्यांहून कमी असेल? (२) सुमारे ५० टक्के असेल? (३) त्याहूनही बरीच जास्त असेल?

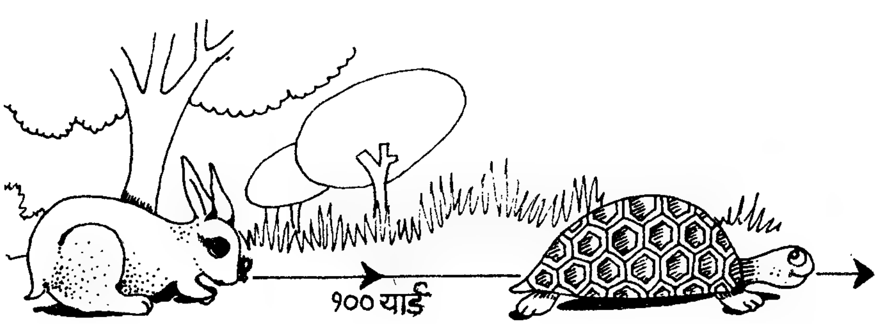
उत्तरे लेखांक १७ मध्ये. □ □ □

# १६. ससा आणि कासव

ही इसापनीतीतली गोष्ट नव्हे - गणितातली गोष्ट आहे ! एकदा ससा आणि कासव यांच्यात वाद सुरू झाला. ससा कासवापेक्षा दसपट वेगानं धावू शकत होता. म्हणून त्याने कासवाला शर्यतीचं आव्हान दिलं आणि म्हटलं, "तू माझ्यापुढे १०० यार्ड जाऊन मग पळायला सुरुवात कर. मी तुला पटकन पकडतो की नाही पहा !"

"तर मग तू मला पकडू शकणार नाहीस !" कासव शांतपणे उद्गारलं.

"मी काही गोष्टीतल्या सशाप्रमाणे झोपणार नाही वाटेत." ससा टेचात बोलला.




चित्र क्र. १

"तरीसुद्धा तू मला कधीच पकडू शकणार नाहीस." कासव म्हणालं, "फार काय मी हे तुला गणितानं सिद्धच करून दाखवतो. मग आपल्याला पळायची जरूरच नाही"

"दाखव" ससोबा म्हणाले. पण मनातून त्यांना जरा भीती वाटली. कारण कासवाच्या डोकेबाजपणाबद्दल वाद नव्हता.

"हे पाहा, मी तुझ्यापुढे १०० यार्ड असणार सुरुवातीला. तुला प्रथम हे शंभर यार्ड अंतर भरून काढायला पाहिजे. कबूल?"

"कबूल." - ससा.

"तोपर्यंत मी काही स्वस्थ बसणार नाही - मी पण पुढे गेलो असेन." कासव म्हणाले.

"पण तू काही माझ्याइतका जोरात पळणार नाहीस. तू फक्त १० यार्डच पुढे गेलेला असशील." - ससा लगेच म्हणाला.

"पण हे १० यार्ड तुला भरून काढावे लागतील आणि तोपर्यंत मी आणखी एक यार्ड पुढे गेलो असेन. ते अंतर तू भरून काढेपर्यंत मी पुन्हा पुढे जाईन. ते अंतर भरून काढेपर्यंत मी आणखी पुढे गेलो असेन. नाही का?" - कासव.

"पण मी केव्हातरी तुला पकडेनच !" ससा किंचित् गोंधळून म्हणाला.

"पण केव्हा? कारण मी आता सांगितल्याप्रमाणे तू नेहमीच माझ्या मागे असणार ! तू माझ्या पूर्वीच्या जागी येईपर्यंत मी थोडा तरी पुढे जाणारच !"

सशाला ह्या युक्तिवादावर उत्तर सापडेना. तुम्हाला तो पटतो का?

**तर्कदोष** (Fallacy)

गणित हा तर्कशास्त्रावर अवलंबित असलेला विषय आहे. काही नियम गृहीतक म्हणून धरून त्यावरून, तर्कशास्त्रीय प्रणालीचा वापर करून निष्कर्ष काढायचे हा गणितज्ञाचा प्रयत्न असतो. पण जर ही तर्कशास्त्रीय प्रणाली कुठे चुकली तर चुकीचे निष्कर्ष निघतात. वर सांगितलेल्या गोष्टीत कासवाच्या युक्तिवादात तर्कदोष आहे.

तर्कदोषाची दोन उदाहरणे पहा.

बीजगणितातलं हे एक उदाहरण आहे. समजा, अ आणि ब दोन समान संख्या आहेत.

अ = ब

आता ह्या समीकरणाला ब ने गुणा :

अ × ब = ब × ब

हे दोनही समान आकडे अ × अ मधून वजा करा.

अ × अ – अ × ब = अ × अ – ब × ब

दोन्ही बाजूंचे गुणक पाडा

अ (अ – ब) = ( अ + ब) × ( अ – ब)

आता ह्या समीकरणात दोन्ही बाजूला असलेल्या गुणकाने (अ – ब) ने भाग द्या. म्हणजे :

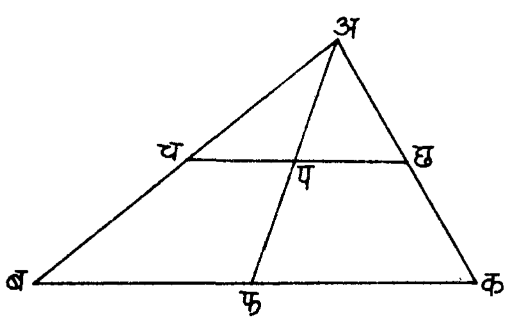
अ = अ + ब

अरेच्या ! आपण प्रथम अ = ब असं धरून चाललो. मग हे कसं उत्तर आलं? तर अ = ब = १ असेल तर वरील गणिताचा निष्कर्ष आहे.

१ = २.

चूक कुठे आहे?

ह्यात तर्कदोष आला जेव्हा आपण (अ – ब) ने भाग दिला. कारण अ – ब = ० (शून्य !) आणि शून्याने भाग द्यायची गणितीय तर्कशास्त्रात परवानगी नसते !




चित्र क्र. २

भूमितीतला एक तर्कदोष चित्र क्रमांक २ मध्ये दाखवला आहे.

ह्या त्रिकोणात 'ब क' ही रेषा 'च छ' पेक्षा लांब वाटते. आता आपण त्या समान आहेत हे सिद्ध करू !

'चछ' वर 'प' एक कुठलाही बिंदू घ्या. 'अ' आणि 'प' ला जोडणारी सरळ रेषा 'ब क' ला 'फ' मध्ये मिळते. म्हणजे 'चछ' मधल्या प्रत्येक बिंदूला 'बक' वर एक बिंदू जोडीदार आहे. त्याचप्रमाणे 'ब क' वर कुठलाही बिंदू घेतला तर वरील रचनेचा उपयोग करून आपल्याला 'चछ' वर त्याचा जोडीदार बिंदू मिळतो.

म्हणजे 'चछ' आणि 'ब क' वर समान संख्येने बिंदू आहेत. त्यामुळे त्या सारख्या लांबीच्या झाल्या. नाही का?

वास्तविक बिंदूला लांबी नसते आणि बिंदूंची संख्या (प्रत्येक रेषेवर) अनंत आहे. शून्य आणि अनंत यांचा गुणाकार करायची परवानगी गणितीय गृहीतके देत नाहीत. म्हणून वरील निष्कर्ष काढणे हा तर्कदोषाचा नमुना होय.

**कासवाचा तर्कदोष**

कासवाच्या तर्काप्रमाणे गणित करून पाहू. शंभर यार्डाचं अंतर तोडेपर्यंत कासव १० यार्ड पुढे गेलं. ते तोडेपर्यंत कासव १ यार्ड पुढे जाईल. म्हणजे हे अंतर भूमितीश्रेणीने दसपटीने कमी होत जाईल.

१००, १०, १, ०, ०.१, ०.०१, ०.००१, ..........

कासव म्हणतं की ही क्रमावली संपत नसल्याने ते नेहमीच पुढे असेल. ही आकड्यांची क्रमावली असंख्य असली तरी त्यांची बेरीज अनंत नाही. बेरीज करणं सोपं आहे - त्यातून हा आकडा तयार होतो.

१११.११११११........

ही आवर्त दशांशांची संख्या १०००।९ इतकी भरते. म्हणजे इतकं अंतर गेल्यावर ससा कासवाला पकडेल.

कासवाने मात्र (लबाडीने) असं भासवलं की अगदी अनंत काळपर्यंत शर्यत चालली तरी तेच पुढे राहील ! क्रमावलीने मांडलेले आकडे असंख्य असले तरी त्यांची बेरीज असंख्यच होते असं नाही.

[ 'ॲकिलिस (ग्रीक पुराणकथेतला एक शूर योद्धा) आणि कासव' म्हणून गाजलेली ही एक गणितातली तर्कदोषाच्या नमुन्याची गोष्ट आहे. येथे ॲकिलिस ऐवजी ससा हा बदल केला आहे. ] □ □ □

# १७. 'त्या' प्रश्नांची उत्तरे

## लेखांक १५ मधील प्रश्नांची उत्तरे

**प्रश्न १ : वय ओळखा :** ३६ ह्या आकड्याचे तीन गुणक किती प्रकारे पाडता येतील? एक नमुना म्हणजे ३६ = २ × ३ × ६. जर त्या तीन मुलांची वये २, ३, ६ असती तर त्या वयांची बेरीज २ + ३ + ६ = ११ इतकी भरते. जर शेजारचा घरनंबर ११ असेल तर विक्रेत्याने मुलांची वये २, ३, ६ अशी सांगितली असती - कारण ३६ चे ३ गुणक सर्व प्रकारे पाडून पाहिले तर फक्त एकाच प्रकारात (म्हणजे वर सांगितल्याप्रमाणे) त्यांची बेरीज ११ भरते. ज्या अर्थी घर नंबर पाहूनसुद्धा विक्रेत्याला पेच पडला त्या अर्थी घरनंबर ११ नव्हता ! जर ३६ च्या तीन गुणकांची - ते वेगवेगळ्या प्रकाराने पाडले असले तरी - बेरीज तितकीच होत असेल तर विक्रेत्याला प्रश्न पडणे साहजिक आहे. म्हणून उत्तर शोधण्यासाठी ३६ चे ३ गुणक वेगवेगळ्या तऱ्हेने पाडून पाहा. असं दिसून येईल की फक्त (२, २, ९) आणि (१, ६, ६) हे गुणकच असे आहेत की त्यांची बेरीज सारखी भरते. **म्हणजे घरनंबर १३ असणार.** मुलांची वये २, २, ९ किंवा १, ६, ६ असणार. पण घरमालकिणीला 'सर्वात मोठी' मुलगी ज्या अर्थी होती त्या अर्थी त्या मुलीचे वय ९ होते. (६, ६ ही जुळ्यांची वये होतात !) म्हणून विक्रेत्याने २, २, ९ हा पर्याय निवडला. म्हणून **मुलांची वये** २, २, ९.

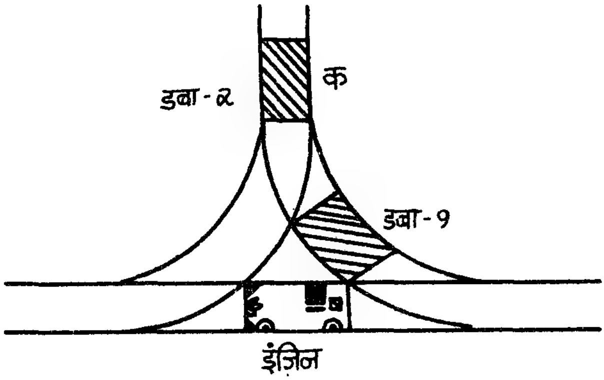
**प्रश्न २ : जन्मतारीख ओळखा :** पार्टी १ जानेवारीला भरली होती आणि अभिजितचा वाढदिवस ३१ डिसेंबरला होता.

आपण असं समजू की अभिजितने आपलं विधान १ जानेवारी १९७८ ला केलं. 'परवा मी १५ वर्षाचा होतो' - म्हणजे ३० डिसेंबर १९७७ ह्या दिवशी त्याचे वय १५ पूर्ण असून, तो १६ व्या वर्षात होता. हे १६ वे वर्ष ३१ डिसेंबर १९७७ ला पूर्ण झाले. त्याचप्रमाणे ३१-१२-७८ ला तो १७ चा आणि ३१-१२-७९ ला १८ चा होणार. ज्या अर्थी तो १९७८ मध्ये हे संभाषण करत होता त्या अर्थी 'पुढच्या वर्षी' म्हणजे १९७९ संपेपर्यंत त्याला १९ वं वर्ष लागणार !

**प्रश्न ३ : बाप से बेटी सवाई :** लीलावतीने निवडलेला मार्ग असा : ती त्या दोघा चॅम्पियन्सशी वेगवेगळ्या खोलीत, वेगळ्या पटांवर खेळली - एकाबरोबर 'काळी' बाजू घेऊन तर दुसऱ्याबरोबर 'पांढरी' बाजू घेऊन. पहिल्या चॅम्पियनने जी सुरुवात केली ती तिने दुसऱ्या विरुद्ध वापरली आणि दुसऱ्याचं उत्तर पहिल्या विरुद्ध वापरलं. हा मार्ग तिने शेवटपर्यंत वापरला ! त्यामुळे वास्तविक खेळ त्या दोघा चॅम्पियन खेळाडूंतच होत असून जर त्यात पहिला जिंकला तर लीला दुसऱ्या पटावर जिंकणार. जर दुसरा जिंकला तर लीला पहिल्या पटावर मात करणार आणि खेळ 'ड्रॉन' झाल्यास तिची दोनही पटांवर बरोबरी होणार.

**प्रश्न ४ : हे जमेल का?** कोपऱ्यातले दोन चौकोन कापल्यामुळे पटावर ३० पांढरे आणि ३२ काळे चौकोन उरले. झाकायच्या लांबड्या पट्टीने प्रत्येकी एक काळा आणि एक पांढरा चौकोन झाकला जातो. म्हणून ३० पांढरे आणि ३२ काळे चौकोन झाकता येणार नाहीत.

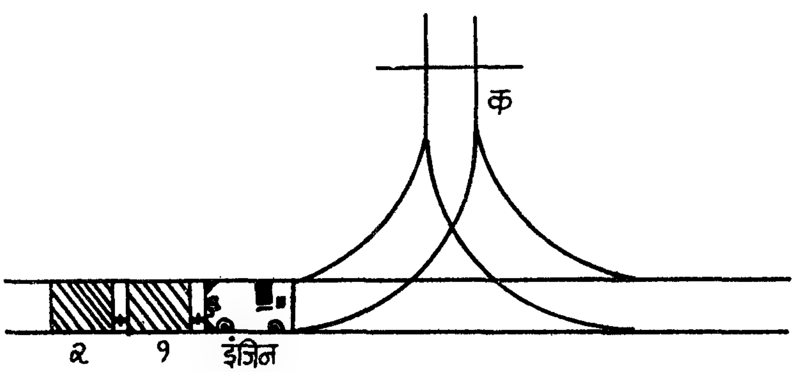
**प्रश्न ५ : शंटिंग करा :** खालील चित्रांच्या मदतीने ह्या प्रश्नाचं उत्तर समजणं सोपं होईल. प्रथम डाव्या बाजूच्या रुळांवरला डबा - २ इंजिनाच्या मदतीने 'क' ह्या भागावर पोचवावा. इंजिन परत पहिल्या जागी आणावे. पहा चित्र क्रमांक १.




**चित्र क्र. १**

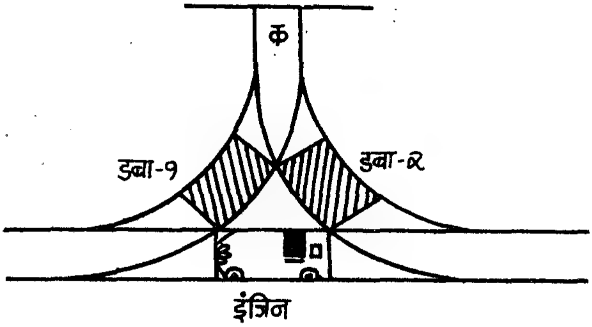
मग इंजिन उजवीकडच्या रुळावर नेऊन त्याला अनुक्रमे डबा - १ आणि डबा २ जोडावे, आणि हे तिन्ही खालच्या रुळावर डाव्या फाट्याच्या डावीकडे आणून सोडावेत. पहा चित्र क्रमांक २.

डबा - २ तेथेच सोडून डबा - १ हा इंजिनाच्या मदतीने उजवीकडच्या रुळावरून 'क' वर पोचवावा आणि परत येऊन इंजिनाच्या मदतीने डबा - २ उजव्या रुळावर आणावा.




**चित्र क्र. २**

मग इंजिन डाव्या रुळावर आणून डबा - १ हा ओढून आणावा आणि इंजिन खालच्या रुळावर आणावं - म्हणजे शंटिंग पुरं झालं ! पहा चित्र क्रमांक ३.




**चित्र क्र. ३**

**प्रश्न ६ असं का व्हावं ? :** अशी कल्पना करा की 'अ' पासून 'ब' कडे जाणाऱ्या बसेस दर तासाला 'क' वरून जातात. म्हणजे 'ब' पासून 'अ' कडे जाणाऱ्या बसेससुद्धा दर तासाला 'क' वरून जात असणार. पण बसेसचं वेळापत्रक असं होतं की 'अ' कडे जाणारी बस बरोबर तासाच्या ठोक्याला - म्हणजे १ वाजता, २ वाजता, ३ वाजता ...... अशी 'क' स्थानकावर येई, आणि 'ब' कडे जाणारी बस १ वाजून ६ मिनिटांनी, २ वाजून ६ मिनिटांनी......... अशी 'क' वरून जाई. त्यामुळे तो रिकामटेकडा माणूस तासाच्या पहिल्या ६ मिनिटात स्थानकावर आला तर त्याला 'ब' कडे जाण्याची बस मिळे आणि शेवटच्या ५४ मिनिटांत आला तर त्याला 'अ' कडे जाणारी बस पकडता येई. तो माणूस 'वाटेल त्यावेळी' म्हणजे वेळ ठरवून येत नसल्याने तो कुठल्याही तासाच्या शेवटच्या ५४ मिनिटांत स्थानकावर यायची संभाव्यता त्या तासाच्या पहिल्या ६ मिनिटांत तेथे येण्याच्या संभाव्यतेच्या ९ पट होती. म्हणून तो १०० पैकी ९० वेळा 'अ' कडे आणि १० वेळा 'ब' कडे जाई.

**प्रश्न ७ वाढदिवस :** तुम्हाला आश्चर्य वाटेल पण पैज जिंकण्याची शक्यता जवळजवळ ७० टक्के आहे ! वर्षाचे ३६५ दिवस जर गृहीत धरले तर असं गणित मांडा. कुठलाही एक मुलगा निवडा. त्याचा वाढदिवस ज्या दिवशी असेल त्या दिवशी बाकीच्या २९ मुलांचा वाढदिवस नसेल याची संभाव्यता काय? त्या मुलांपैकी एक मुलगा निवडल्यास त्याचा वाढदिवस पहिल्याच्या वाढदिवसा दिवशी नसेल याची संभाव्यता ३६४/३६५ आहे. त्या दोघांचे वाढदिवस वेगवेगळे असले तर

तिसऱ्याचा वाढदिवस ते दोन दिवस वगळून तिसऱ्याच दिवशी असण्याची संभाव्यता ३६३/३६५ आहे. म्हणजे त्या तिघांचे वाढदिवस वेगवेगळ्या दिवशी असण्याची संभाव्यता इतकी भरते –

$$\frac{३६४}{३६५} \times \frac{३६३}{३६५}$$

हेच गणित जर ३० मुलांच्या बाबतीत मांडत गेलो तर त्या सर्वांचे वाढदिवस वेगवेगळ्या दिवशी असण्याची संभाव्यता.

$$\frac{३६४}{३६५} \times \frac{३६३}{३६५} \times \frac{३६२}{३६५} \times \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \times \frac{३३७}{३६५} \times \frac{३३६}{३६५}$$

इतकी भरते. हा गुणाकार (आहे खरा प्रचंड !) केला तर उत्तर ३० टक्क्यांपेक्षा कमी भरते. म्हणजे असं न होण्याची संभाव्यता ७० टक्क्याहून जास्त आहे. म्हणून ही पैज मारून तुम्ही पैसे मिळवू शकाल !

□ □

# १८. महान गणिती ‘गाऊस’

‘गणित म्हणजे सर्व विज्ञानांची राणी’ हे विधान करणारा एक महान गणिती होता - ३० एप्रिल १७७७ मध्ये जन्मलेला कार्ल फ्रेडरीख गाऊस. 'Men of Mathematics' या प्रसिद्ध गणितज्ञांबद्दलच्या पुस्तकाचा लेखक अेरिक टेंपल बेल याने गाऊसला ‘गणितज्ञांचा राजकुमार’ अशी पदवी बहाल केली आहे. अनेक शास्त्रज्ञ गाऊसला आर्किमिडिस आणि न्यूटन यांच्या मालिकेत बसवतात. गणितावरील पुस्तकात गणितज्ञांबद्दलही माहिती यावी ह्या हेतूने गाऊसबद्दल थोडी माहिती येथे देत आहे.

**मुलाचे पाय पाळण्यात :**

अनेक मोठे गणितज्ञ लहान वयातच आपली प्रतिभा दाखवतात. गाऊस ह्या नियमाला अपवाद नव्हता. तो स्वतः विनोदाने म्हणे, ‘मी बोलायच्या आधी मोजायला शिकलो !’ त्याचे वडील माळी, गवंडी अशा तऱ्हेची अंगमेहनतीची कामं करीत. एक दिवस ते काही तरी हिशेब मांडत बसले होते, आणि लहानगा गाऊस ते पाहात होता. त्यांचा हिशेब होतो न होतो तोच त्यांना एक बारीक आवाज ऐकू आला, ‘बाबा ! तुमचं उत्तर चुकलं, ते अमुक अमुक असायला पाहिजे !’ बाबांनी हिशेब तपासला आणि आपल्या पोराचं म्हणणं बरोबर आहे हे त्यांना दिसून आलं.

त्यावेळी ते पोर तीन वर्षाचं देखील नव्हतं.

**शाळेतली चमक :**

गाऊस दहा वर्षांचा असतानाची गोष्ट. शाळेत मास्तरांनी वर्गातल्या मुलांना खालील प्रकारचा प्रश्न घातला :

१ + २ + ३ + ........ + १०० = ? म्हणजे एकापासून शंभरपर्यंतच्या सर्व आकड्यांची (पूर्णांक) बेरीज किती?



गाऊस : गणितातील युगकर्ता

त्यावेळी अशी पद्धत होती की मास्तरनी प्रश्न दिला की ज्याला तो प्रथम सुटेल त्याने पाटीवर लिहून पाटी टेबलावर ठेवायची. त्यानंतर ज्याला सुटेल त्याने उत्तर मांडून पाटी त्या पाटीवर ठेवायची. अशा तऱ्हेने हळूहळू शिक्षकांच्या टेबलावर पाट्यांचा ढीग रचला जाई.

मास्तरांचं गणित मांडून होतं न होतं तोवर गाऊसची पाटी त्यांच्या टेबलावरती आलीसुद्धा ! बाकीची मुलं तासभर गणित करत बसली होती आणि शिक्षक अविश्वासाने, स्वस्थ बसलेल्या गाऊसकडे पाहात होते. शेवटी सर्वांच्या पाट्या आल्यावर मास्तरांनी गणितं तपासली. केवळ गाऊसचं उत्तर बरोबर होतं !

गाऊसने हा प्रश्न एक सोपी पद्धत वापरून चुटकीसरशी सोडवला.

त्याने पाहिलं की पहिल्या आणि शेवटच्या आकड्यांची बेरीज १०१ होते. दुसऱ्या आणि शेवटून दुसऱ्या आकड्यांची बेरीज पण तितकीच होतेय. आपण जर दोन्ही टोकांपासून (१ आणि १०० पासून) समान अंतरावर असलेल्या आकड्यांच्या जोड्या पाडल्या : (१, १ ००), (२, ९९), (३, ९८) ..... तर प्रत्येक जोडीची बेरीज १०१ होते. अशा एकंदर ५० जोड्या असल्याने सर्व आकड्यांची बेरीज होईल -

५० × १०१ = ५०५०

इतर मुले शंभर बेरजा करताना कुठे ना कुठे चुकली. गाऊसला बेरीजच करावी लागली नाही !

गाऊसच्या शिक्षकांनी आपल्या ह्या असामान्य प्रतिभेच्या विद्यार्थ्याला उत्तेजन दिलं. त्यांनी स्वतःच्या पैशांनी एक गणिताचं पुस्तक गाऊसला आणून दिलं. त्याने अर्थातच त्याचा चटकन फन्ना उडवला !

**सतरा बाजूंची बहुभुजाकृती :**

अठरा वर्षे वयाचा असताना गाऊसने एक महत्त्वाचा प्रश्न सोडवला. रूलर (फूटपट्टी) आणि कंपासच्या सहाय्याने आपल्याला समान बाहूंची आकृती काढता येईल का? त्रिकोण, चौकोन, पंचकोन आणि षट्कोन काढणं सोपं आहे. (पंचकोन, समान भुजांचा कसा काढाल? पाहा प्रयत्न करून !) युक्लिड ह्या आद्य भूमितीकाराने १५ बाहूंची आकृती पण काढून दाखवली होती (३, ४, ५, १५) ह्यांना दुपटीने गुणत गेल्यास (६, ८, १०, ३०); (१२, १६, २०, ६०) ..... इत्यादि आकडे मिळत जातात. तितक्या समान बाहूंच्या बहुभुजाकृती काढणं सोपं आहे.

पण ७, ९, ११, १४, १७ इत्यादि आकड्यांच्या संख्येने सम बहुभुजाकृती काढणं युक्लिडनंतर २००० वर्षे प्रयत्न करूनही गणितज्ञांना साध्य झालं नव्हतं.

१८ वर्षे वयाच्या गाऊसने १७ समान बाहूंची बहुभुजाकृती काढून दाखवली. इतकेच नव्हे, तर रूलर आणि कंपासच्या सहाय्याने किती समान भुजांच्या बहुभुजाकृती काढता येतील हे पण गणिताने दाखवलं. गाऊसने सांगितलेला नियम असा -

समजा आपण २ × २ × २ ...... असं 'क' वेळा लिहिलं. तर त्या संख्येला $२^{क}$ असं थोडक्यात लिहितात. उदाहरणार्थ :

$२^१ = २ \quad २^२ = २ \times २ = ४$

$२^३ = २ \times २ \times २ = ८$

ह्या पद्धतीप्रमाणे 'क' हा कुठलाही पूर्णांक असला तर गाऊसच्या शोधानुसार

$$२^{(२^क)} + १$$

इतक्या समान भुजांची आकृती काढता येते. उदाहरणार्थ क = १ असे धरल्यास

$२^क = २^१ = २ \qquad २^{(२^क)} = २^२ = ४$

$२^{(२^क)} + १ = ५$

म्हणजे ५ बाजूंची (पंचकोनात्मक) आकृती काढता येते. तसेच क = २ असे धरल्यास वरील संख्या १७ इतकी होते.

गाऊसला स्वतःला हा शोध इतका आवडला की त्याने १७ समान भुजांची आकृती आपल्या थडग्यावर चितारायला सांगितलं !

**गाऊसचे इतर शोध :**

अंकशास्त्रात गाऊसने अनेक महत्त्वाचे शोध लावले. अनेक वर्षे, शतके गणितज्ञांना भेडसावणारे प्रश्न त्याने निकालात काढले. त्याची प्रवृत्ती, कुठलंही संशोधन (त्याच्या मताप्रमाणे) पूर्णत्वाला पोचल्याशिवाय प्रसिद्ध करायचं नाही अशी असल्याने अनेक महत्त्वाचे शोध अप्रसिद्ध अवस्थेत त्याच्या कागदपत्रात नंतर सापडले. त्याचप्रमाणे विद्युतचुंबकीय शास्त्रात गाऊसने अनेक महत्त्वाचे शोध लावले.१८४५ साली वेबर नावाच्या एका सहसंशोधकाला लिहिलेल्या पत्रात गाऊसने विद्युच्चुंबकीय परिणाम प्रकाशाच्या वेगाने एका ठिकाणाहून दुसरीकडे जात असल्याची शक्यता व्यक्त केली आहे. परंतु हे गणिताच्या रूपाने कसं व्यक्त करायचं हे अद्याप साध्य न झाल्याने आपण आपले हे विचार प्रसिद्ध केले नाहीत असं त्याने वेबरला कळवलं. पुढे २५ वर्षांनी मॅक्स्वेल नावाच्या शास्त्रज्ञाने हे कार्य पूर्ण केलं.

गाऊसने खगोलशास्त्रात ग्रहमालेबद्दलची अनेक गणितं सोडवली. त्याचप्रमाणे वक्र पृष्ठभागांवरची भूमिती कशी मांडायची, हे गणिताने दाखवलं. पुढे त्या गणिताचा आईन्स्टाइनला उपयोग झाला. १८३२ मध्ये

गाऊस आणि वेबर यांनी रशियात झारच्या हिवाळी आणि उन्हाळी राजवाड्यांच्या दरम्यान इलेक्ट्रिक टेलिग्राफ बसवला - तो बहुतेक काम करणारा पहिला टेलिग्राफ असावा.

गाऊसचं निधन १८५५ साली झालं. तोपर्यंत 'स्पेशलायझेशन'चा जमाना सुरू होत होता. गणित आणि भौतिकशास्त्र यांच्या अनेक शास्त्रांमध्ये अद्वितीय कामगिरी करणारे आता गाऊसच्या पश्चात कोणी झाले नाहीत. □ □ □

# १९. चक्रव्यूह

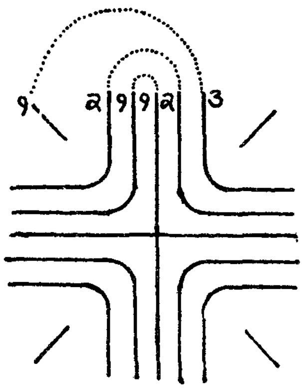
महाभारतातील युद्धात कौरवांनी चक्रव्यूह ह्या सैन्य रचनेचा वापर केला होता. त्याची आकृती चित्र क्र. १ मध्ये दिली आहे.



**आकृती नं. १**

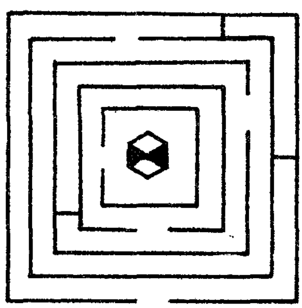
ह्या व्यूहात शिरून बाहेर पडण्याची कला पांडवांच्यात फक्त अर्जुनाला साध्य होती. त्याच्या मुलाला - अभिमन्यूला - आत शिरता येत होतं, पण बाहेर पडता येत नव्हतं.

ह्या आकृतीच्या धर्तीवर आणखी मोठाल्या आणि गुंतागुंतीच्या आकृत्या काढता येतील. चित्र क्र. २ मध्ये ती पद्धत दाखवली आहे. तिथे दाखवलेली ठळक आकृती प्रथम काढावी. मग वरच्या शेजारच्या दोन टोकांना जोडावं (नं. १ ला १ शी) त्यानंतर त्याच्या बाजूच्या दोन टोकांना




**आकृती नं. २**

(नं. २ ला २ शी) जोडावं. त्यानंतर त्यांच्या दोन्ही बाजूंच्या (३ नं. च्या) टोकांना जोडावं. अशा तऱ्हेने जोडत गेल्यास चित्र क्र. १ पेक्षा अधिक मोठी आकृती तयार होईल.



**आकृती नं. ३**

**गुंतागुंतीचे प्रकार :**

अशा तऱ्हेच्या गुंतागुंतीच्या आकृतींचा उल्लेख पुराणकथांत, परिकथांत आणि इतिहासात सापडतो. लखनऊच्या इमामबाऱ्यातला 'भुलभुलैया' हा एक अशाच प्रकारचा नमुना आहे. अशा काही आकृतीत आत शिरून मध्यावर अमुक ठिकाणी कसं जायचं असा प्रश्न उद्भवतो. कारण बरेच पर्यायी मार्ग असून अचूक मार्ग शोधणं अवघड असतं.

(चक्रव्यूहात आत जाण्याचा एकच मार्ग आहे.) त्या उलट काही आकृतीत आत शिरल्यावर परत बाहेर कसं पडायचं हा प्रश्न असतो.

गणितज्ञांनी 'टॉपॉलॉजी' (संस्थिती) ह्या विषयाखाली अशा आकृत्यांचं विवेचन केलं आहे. अशा आकृतीत आत शिरल्यावर बाहेर पडायचं असलं तर सोपा (पण जवळचा नव्हे) मार्ग म्हणजे आपला एक हात (डावा किंवा उजवा कुठलाही) एका 'भिंतीवर' आहे अशी कल्पना करून त्या आकृतीत 'शिरावे' आणि तो हात भिंतीवरून न उचलता, सरळ चालत जावं - म्हणजे तुम्ही बाहेर पडाल ! परंतु एका ठराविक मध्यवर्ती ठिकाणावर जायला हा उपाय लागू पडणार नाही !

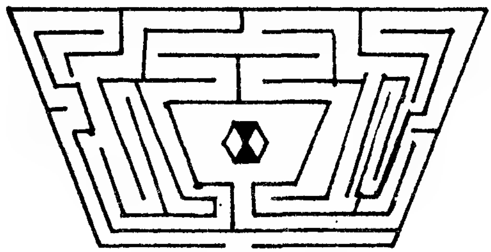
चित्र क्र. ३ मध्ये ह्या उपायाने तुम्ही असलेल्या मध्यवर्ती ठिकाणाकडे न जाता त्या बाहेरच्या बाहेर प्रदक्षिणा घालून परत याल.

याचे कारण चित्र क्र. ३ मधल्या आकृतीच्या सर्व भिंती एकमेकांना जोडलेल्या नाहीत. जर एखाद्या गुंतागुंतीच्या आकृतीच्या सर्व भिंती एकमेकांना जोडलेल्या असतील तर भिंतीवर हात ठेवून जाण्याचा मार्ग तुम्हाला त्या आकृतीच्या मध्यवर्ती ठिकाणाकडेसुद्धा घेऊन जाईल. अशा आकृतींना सरल संबंधित गुंतागुंत (Simply connected Maze) असं गणितज्ञांनी नाव दिलं आहे.

कुठल्याही गुंतागुंतीच्या आकृतीत मार्गदर्शक असा रामबाण उपाय आहे का ? एडवर्ड लुकसच्या १८८२ मध्ये प्रसिद्ध झालेल्या गणितावरील गमतींच्या एका पुस्तकात असा उपाय दिला आहे. जागेच्या अभावी तो येथे देता येत नाही. (उत्सुक वाचकांनी ह्या विषयावर 'सायंटिफिक अमेरिकन - जानेवारी १९५९' मध्ये मार्टिन गार्डनरचा लेख वाचावा.)

**हॅम्पटन कोर्टमधली आकृती :**

लंडनबाहेर १६९० साली बांधलेल्या हॅम्पटन कोर्टच्या राजवाड्यात कुंपणाने तयार केलेली गुंतागुंत आजही टुरिस्ट लोकांना वुचकळ्यात टाकते. तिचा आराखडा चित्र क्र. ४ मध्ये दिला आहे.



**आकृती नं. ४**

ही आकृती जरी सरल-संबंधित नसली तरी भिंतीवर हात ठेवून जाण्याचा उपाय तुम्हाला प्रवेशद्वारातून केंद्राकडे आणि परत बाहेर आणून सोडील. कधी लंडनला गेलात तर पहा प्रयत्न करून – नाहीतर एक पेन्सिल घेऊन चित्र क्र. ४ मधल्या आकृतीतून फिरवून खात्री करून घ्या !

□ □ □

# २०. ओली - सुकी

जेव्हा दोन पर्याय समोर असतात आणि कुठला निवडावा यासाठी निर्णायक कारण उपलब्ध नसतं तेव्हा चिठ्ठ्या टाकणे किंवा नाणेफेक अशा उपायांचा अवलंब केला जातो. अशा उपायांमागे अभिप्रेत असते समान संभाव्यता (Equal Probability) उदाहरणार्थ, नाणं व्यवस्थित फेकलं की ते हवेत फिरून खाली पडताना 'हेड वर' का 'टेल वर' पडेल ते सांगता येत नाही - दोन्ही पर्याय सारखेच संभवनीय असतात. ही संभाव्यता गणितात मोजता येते. त्यासाठी केलेले नियम ह्या उदाहरणाने सांगता येतील.

जी घटना निश्चित घडणार तिची संभाव्यता १ (एक) इतकी धरली जाते. नाणेफेकीत नाणं खाली पडणार ह्या घटनेचे पृथक्करण केल्यास तिचे दोन पर्याय म्हणजे, 'नाणे हेड वर असलेल्या परिस्थितीत खाली पडेल' आणि 'नाणे टेल वर असलेल्या परिस्थितीत खाली पडेल' असं दिसून येतं. त्यांची संभाव्यता सारखी हे आपण आधीच पाहिलं. शिवाय हे परस्पराला वगळणारे आहेत (हेड वर आणि टेल वर एकदम घडणार नाही.) म्हणून त्यांच्या संभाव्यतांची बेरीज केल्यास ती मूळ घटनेच्या ('नाणे खाली पडेल') संभाव्यतेइतकी झाली पाहिजे. त्यावरून प्रत्येक पर्यायाची संभाव्यता १/२ (अर्धी) आहे हे दिसून येतं.

ही संभाव्यता (किंवा कुठल्याही घटनेची संभाव्यता) मोजायला

प्रयोग पण करता येईल. जर नाणं १०० वेळा फेकलं तर 'हेड वर' असं किती वेळा पडलं याची नोंद केल्यास ते - १०० च्या जवळजवळ अर्धी संख्या, म्हणजे ५० वेळा - असं दिसून येईल. आपण हेड वर आलं की प्रयोग यशस्वी झाला असं म्हटलं तर यशस्वी प्रयोगांचे प्रमाण १/२ च्या आसपास असेल. हा प्रयोग जितक्या जास्त वेळा केला जाईल तितक्या अधिक आत्मविश्वासाने हे प्रमाण १/२ च्या अधिक जवळ असल्याचं भाकीत संख्याशास्त्रज्ञ करू शकतो. म्हणजे १०० पेक्षा १००० वेळा हा प्रयोग केलात तर यशस्वी प्रयोगांचं प्रमाण १/२ च्या अधिक निकट असलेलं आढळून येईल.

**यादृच्छिकता** (Randomness) :

वरील प्रयोगात असं गृहीत धरलं की नाणे फेकणाऱ्याने ते नाणं 'व्यवस्थित' फेकलं. याचा अर्थ, फेकल्यावर ते कसं पडेल यावर त्याचं काही नियंत्रण राहणार नाही. आपल्याला पाहिजे तसं पडेल अशा बेताने नाणं टाकल्यास अर्थातच वरील भाकीत बरोबर येणार नाही.

खेळातला घनाकृती फासा एका डब्यात घालून हलवून फेकला की तो कसा पडेल हे सांगता येणार नाही. म्हणजे त्याच्या ६ पैकी कुठलाही पृष्ठभाग वर असण्याची शक्यता आहे. म्हणून अमुक एक पृष्ठभाग वर येण्याची संभाव्यता १/६ (एक षष्ठांश) इतकी आहे. अशा तऱ्हेच्या घटनेला 'यादृच्छिक घटना' (Random Event) असं संख्याशास्त्रात म्हटलं आहे.

याचं आणखी एक उदाहरण पाहू. चार दारुडे एका गुत्त्यात शिरले. आत शिरताना त्यांनी आपापली टोपी क्लोकरूममध्ये ठेवली. दारू पिऊन, झिंगून आल्यावर त्यांनी आपापल्या टोप्या घेण्याचा प्रयत्न केला. पण बुद्धी ठिकाणावर नसल्याने मिळेल ती टोपी स्वतःची समजून घेतली. ही निवडण्याची पद्धत यादृच्छिक म्हटली पाहिजे ! तर प्रश्न असा की कोणालाही स्वतःची टोपी मिळू नये असं घडण्याची संभाव्यता किती?

चार लोकांना चार टोप्या किती वेगवेगळ्या तऱ्हेने वाटता येतील? थोडा विचार केल्यास ही संख्या ४×३×२×१ = २४ इतकी आहे हे दिसून येईल. आपण दारूड्यांना नंबराने ओळखू : १, २, ३, ४ आणि त्यांच्या

टोप्यांना त्यांचेच नंबर देऊ मग दारूड्यांचे नंबर वर आणि खाली टोप्यांचे असे एक टेबल तयार करता येईल.

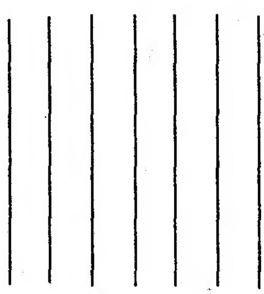
| दारूडे : | १ | २ | ३ | ४ |
|---|---|---|---|---|
| टोप्या | १ | २ | ३ | ४ |
| | १ | ३ | ४ | २ |
| | १ | ४ | २ | ३ |

इत्यादि..........

ह्या तक्त्यात टोप्यांच्या वरीलप्रमाणे २४ प्रवेशिका (ऐंट्रिज) असतील (वर फक्त ३ दिल्या आहेत.) अशा किती प्रवेशिका आहेत ज्यात कुठल्याही दारूड्याखाली त्या नंबराची टोपी नाही? पहा मोजून ! उत्तर आहे ९. म्हणजे असं घडण्याची संभाव्यता आहे ९/२४ म्हणजे ३/८.

**बफाँचा 'सुईचा प्रश्न' :**

बफाँ (Buffon) नावाच्या गणितज्ञाने एक गमतीदार प्रश्न तयार केला त्याचं थोडक्यात विवरण देत आहे.



चित्रात दाखविल्याप्रमाणे एका मोठ्या कागदावर, ठराविक अंतरावर समांतर रेघा मारा. दोन शेजारच्या रेघांच्या मधल्या अंतराच्या निम्म्या लांबीची एक बारीक सुई किंवा काडी घ्या. आणि नाणेफेकीप्रमाणे - यादृच्छिक पद्धतीने - म्हणजे सुई कशी पडावी इकडे लक्ष न देता, ती सुई फेका. ती सुई कागदावर पडली की एखाद्या रेघेवर तरी पडेल किंवा दोन रेघांच्या मधल्या भागात अलगद पडेल. तर ही सुई रेघेवर (कुठल्याही) पडण्याची संभाव्यता काय?

ह्या प्रश्नाचं उत्तर काढणं गणिताने अवघड असलं तरी प्रत्यक्ष उत्तर आहे कळायला सोपे. ते म्हणजे १/π. छेदस्थानचा π हा आकडा आपल्या परिचयाचा आहे. एखाद्या वर्तुळाचा परिघ त्याच्या व्यासाच्या -π पट असतो. π जवळजवळ २२/७ इतका आहे.

वुल्फ नावाच्या गणितज्ञाने १८४९ ते १८५३ च्या काळात प्रयोग करून पाहिलं. ५००० वेळा सुई फेकून त्याने किती प्रमाणात ती एखाद्या रेषेवर पडते ते पाहिलं. त्यावरून त्याने π म्हणजे जवळजवळ ३.१५९६ असा निष्कर्ष काढला. तो π च्या वास्तविक मूल्याच्या पुष्कळच जवळ आहे.

ज्यांना रिकामा वेळ असेल त्यांनी हा प्रयोग करून पाहावा !

□ □ □

सामान्य माणूस गणित ह्या विषयाशी वचकून असतो. हा विषय ना भयंकर, अति क्लिष्ट, आकडेमोडीनी भरलेला.... ह्याला दुरूनच नमस्कार केलेला बरा असं त्याला वाटतं. ही धारणा बहुतेक शालेय जीवनात घडणाऱ्या गणिताच्या दर्शनाने निर्माण केली जाते, ही अेक दुर्दैवाची गोष्ट आहे. वास्तविक, गणिताच्या अनेक मनोरंजक पैलूंचे आणि मानवी कल्पनाशक्तिला चालना देणाऱ्या वेगवेगळ्या स्वरूपांचे दर्शन योग्य वेळी घडल्यास ह्या विषयाबद्दल जिव्हाळा आणि आदर निर्माण व्हायला हरकत नाही. गणित हा अवघड विषय आहे हे खरं -- पण तो कशामुळे ? निव्वळ आकडेमोडीमुळे नव्हे. लांबलचक फॉर्म्युल्यामुळे नव्हेच नव्हे ! आधुनिक गणितातले कित्येक कूटप्रश्न दिसायला फार सोपे वाटतात. पण ते सोडविण्यासाठी लागणारा अमूर्त आणि व्यापक दृष्टिकोन मोजक्या संशोधकांतच असतो.

अशा ह्या आधुनिक गणिताच्या काही मनोरंजक भागाची, त्यातल्या काही कूटप्रश्नांची इथे थोडक्यात ओळख करून देत आहे.

मनोविकास प्रकाशन